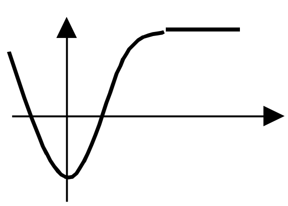
Prüfungsvorbereitung Einführung Differentialrechnung

1) *(8 Punkte)* Ein Velofahrer startet zur Zeit $t = 0$ (t in Sekunden gemessen) seine Fahrt und beschleunigt. Er legt in t Sekunden den Weg $s(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2 + t$ (in Meter gemessen) zurück. Gesucht ist seine Geschwindigkeit nach $t = 3$ Sekunden.
   a) Skizzieren Sie den Graphen im Bereich $0 \leq t \leq 5$ und **schätzen** Sie die Geschwindigkeit bei $t = 3$ **graphisch** (Zeichnen Sie die Tangente ein und Messen Sie dann die Steigung)
   b) Berechnen Sie als Näherung die Steigung der **Sekante** durch den Punkt bei $t = 3$ und den Hilfspunkt (3.5|?), die beide auf dem Graphen liegen.
   c) Berechnen Sie den Differenzenquotienten von s(t) allgemein an der Stelle t (also nicht mehr bei $t = 3$) und vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich (h sollte sich aus dem Nenner kürzen).
   d) Berechnen Sie den Differentialquotienten von s(t) allgemein an der Stelle t und überprüfen Sie Ihre Schätzung aus Aufgabe b), indem Sie die Ableitung bei $t = 3$ berechnen.

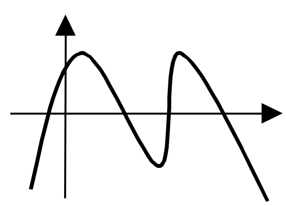
2) *(3 Punkte)* Berechnen Sie den Differenzenquotienten der Funktion $f(x) = 3x - 1$ an der allgemeinen Stelle x und vereinfachen Sie ihn so weit wie möglich!

3) *(6 Punkte)* Der Graph einer Funktion f habe folgende Gestalt:

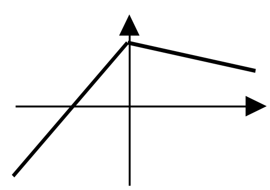
a)



b)



c)



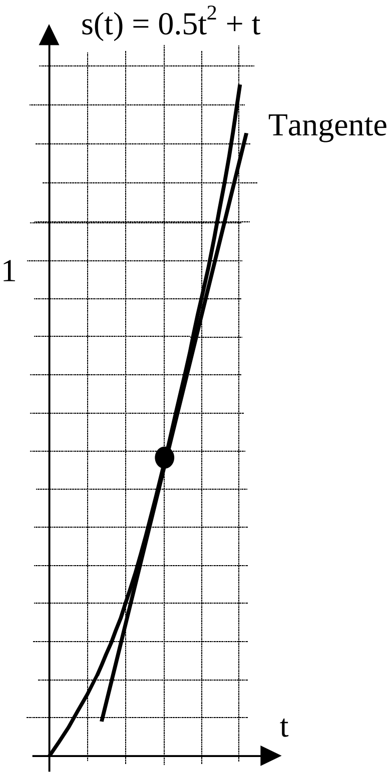
Skizzieren Sie die Ableitungsfunktion $f'(x)$!

4) *(4 Punkte)* Gegeben ist die Funktion $f(x) = ax^3 + bx$. Bestimmen Sie die Parameterwerte a und b so, dass der Graph von f(x) im Punkt (1|3) die Steigung $m = -5$ hat!

5) *(4 Punkte)* Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve mit der Gleichung $y = x^2$ im Punkt P(–2| ?) !

6) *(5 Punkte)* In welchen Kurvenpunkten hat der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = x^3 - 3x + 1$ horizontale Tangenten?

Lösungen (ohne Gewähr):



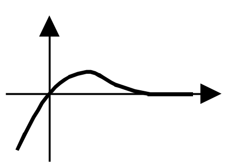
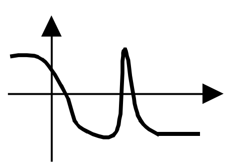
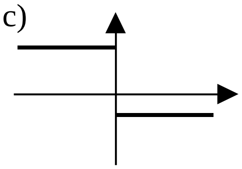
1) a) siehe Graph rechts.
Steigung ist ungefähr 4

b) $m = \frac{9.625 - 7.5}{3.5 - 3} = 4.25$

c) $m = \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \frac{[\frac{1}{2}\cdot(t+h)^2 + (t+h)] - [\frac{1}{2}\cdot t^2 + t]}{h} = t + \frac{1}{2}\cdot h + 1$

d) $s'(t) = \lim_{h\to 0}(t + h + 1) = t + 1 \quad \Rightarrow \quad s'(3) = 4$

2) a) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{[3(x+h) - 1] - [3x - 1]}{h} = \ldots = 3$

3) a)  b)  c) 

4) $a = -4$; $b = 7$

5) $y = -4x - 4$

6) $P_1(1|-1)$; $P_2(-1|3)$