

Prüfungsvorbereitung Differentialrechnung Rep und Ableitungsregeln

1) (8 Punkte) Ein Velofahrer startet zur Zeit $t = 0$ und hat nach t Sekunden den Weg

$$s(t) = t^2 + 3t$$

zurückgelegt. Gesucht ist seine Geschwindigkeit nach $t = 3$ Sekunden.

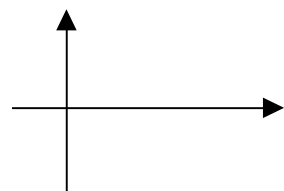
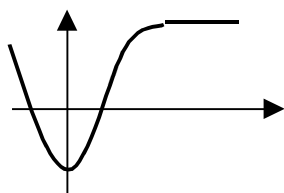
- Skizzieren Sie den Graphen im Bereich $[0, 4]$ und schätzen Sie die Geschwindigkeit bei $t = 3$ **graphisch** (Zeichnen Sie die Tangente ein und messen Sie dann die Steigung).
- Berechnen Sie als Näherung die Steigung der **Sekante** durch den Punkt bei $t = 3$ und den Hilfspunkt $(3.5|?)$, die beide auf dem Graphen liegen.
- Berechnen Sie als Näherung die Steigung der **Sekante** durch den Punkt bei $t = 3$ und den Hilfspunkt $(3+h|?)$, die beide auf dem Graphen liegen.
- Berechnen Sie den Differenzenquotienten von $s(t)$ allgemein an der Stelle t (also nicht mehr bei $t = 3$) und vereinfachen Sie den Term so weit wie möglich (h sollte sich aus dem Nenner kürzen).
- Berechnen Sie den Differentialquotienten von $s(t)$ allgemein an der Stelle t und überprüfen Sie Ihre Schätzung aus Aufgabe b), indem Sie die Ableitung bei $t = 3$ berechnen.

2) (3 Punkte) Berechnen Sie von der Funktion $f(x) = 0.5x^2 - 1$ an der Stelle x !

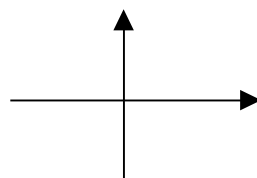
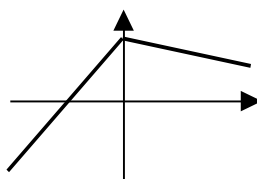
- den Differenzen- und
- den Differentialquotienten

3) (6 Punkte) Skizzieren Sie zu den Graphen im Bild jeweils die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

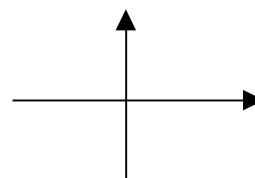
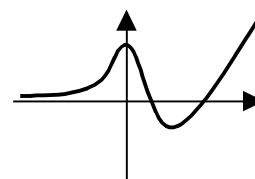
a)



b)



c)



4) (8 Punkte) Bestimmen Sie die Ableitungen folgender Funktionen !

a) $f(z) = (z^3 - 2)(3z^5 + 1)$

d) $f(x) = \frac{c-x}{cx^2}$

b) $f(x) = (x - 4) + \sqrt{x}$

e) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

c) $f(x) = (x - 4) \cdot \sqrt{x}$

f) $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$

5) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = [\sin(x)]^3$

c) $f(x) = \ln(x \cdot \sin(x))$

b) $f(x) = (2x^2 - 3x)^4$

d) $f(x) = 3^{\frac{x}{1-x}}$

6) (3 Punkte) Finden Sie alle Punkte (x- und y-Koordinate) in den der Graph der Funktion $f(x) = \frac{x+3}{3x}$ die Steigung $m = -1$ hat!

7) (3 Punkte) Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{p+x^2}{3x}$ mit dem Parameter p hat an der Stelle $x = 2$ die Steigung $m = 1$. Bestimmen Sie den Parameterwert p !

8) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve mit der Gleichung $y = x^2$ im Punkt $P(-2 | ?)$

9) Gegeben ist die Kurve mit der Gleichung $y = x^3$.

a) In welchen Kurvenpunkten schliesst die Tangente mit der x-Achse den Winkel 45° ein ?

b) Begründen Sie, warum die Kurvensteigung nirgends negativ ist.

10) In welchem Punkt der Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2 - 6x$ ist die Kurventangente parallel zur x-Achse ?

Lösungen (ohne Gewähr):

1) a) - (siehe Musterlösung)

b) $m = \frac{22.75-18}{3.5-3} = 9.5$

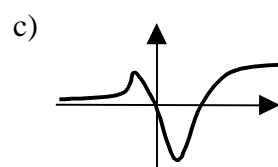
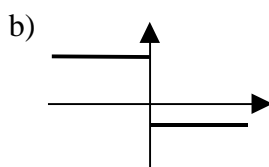
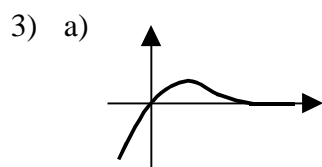
c) $m = \frac{s(3+h)-s(3)}{h} = \frac{(3+h)^2 + 3(3+h) - [3^2 + 3 \cdot 3]}{h} = h + 9$

d) $m = \frac{s(t+h)-s(t)}{h} = \frac{(t+h)^2 + 3(t+h) - [t^2 + 3t]}{h} = 2t + h + 3$

e) $s'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} (2t + h + 3) = 2t + 3 \Rightarrow s'(3) = 9$

2) a) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{0.5(x+h)^2 - 1 - [0.5x^2 - 1]}{h} = \dots = x + 0.5h$

b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} x + 0.5h = x$



4) a) $24z^7 - 30z^4 + 3z^2$

b) $1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $\frac{x+4}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)$

d) $\frac{x-2c}{cx^3}$

e) $\frac{1-\ln(x)}{x^2}$

d) $2x \cdot \cos(x) + x^2(-\sin(x))$

5) a) $f'(x) = 3 \cdot [\sin(x)]^2 \cdot \cos(x)$

c) $\frac{x \cdot \cos(x) + \sin(x)}{x \cdot \sin(x)}$

b) $f'(x) = 4 \cdot (2x^2 - 3x)^3 \cdot (4x - 3)$

d) $\ln(3) \cdot 3^{\frac{x}{1-x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$

6) $S_1(1 | \frac{4}{3}); S_2(-1 | -\frac{2}{3});$

7) $p = -8$

8) $y = -4x - 4$

9) a) $P_1(\frac{\sqrt{3}}{3} | \frac{\sqrt{3}}{9}); P_2(-\frac{\sqrt{3}}{3} | -\frac{\sqrt{3}}{9})$

b) $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

10) $P(\frac{3}{2} | -\frac{9}{2})$