

Prüfungsvorbereitung Berechnung beliebiger Dreiecke, Goniometrie

1) Stimmen die folgenden Behauptungen ? Begründen Sie ihre Antwort mit einer Rechnung, in der Sie die Additionstheoreme verwenden (F+T, S.54) !

a) (2 Punkte) $\sin(\alpha + 90^\circ) = \cos \alpha$

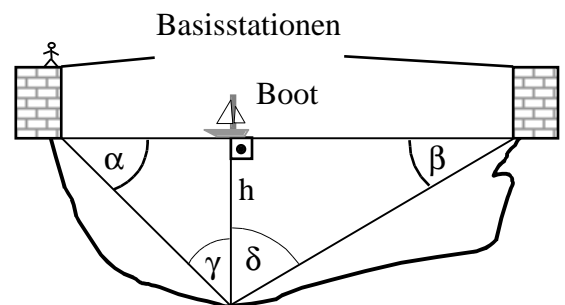
b) (2 Punkte) $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$

c) *(4 Punkte) $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} = \sin \beta \left(\frac{1}{\tan \beta} - \tan \alpha \right)$

2) Berechnen Sie jeweils die gesuchten Seiten und Winkel des Dreiecks ABC! (Finden Sie ebenso heraus, wieviele Lösungen es gibt)

	gegeben	gesucht
a) (2 Punkte)	$a = 10; b = 14; \beta = 72^\circ$	α
b) (2 Punkte)	$a = 11; b = 12; c = 13$	β
c) (2.5 Punkte)	$a = 49; b = 57; \alpha = 32^\circ$	γ
d) (3.5 Punkte)	Umkreisradius $r = 5; a = 3,5; \beta = 50^\circ$	Fläche F

3) (4 Punkte) Gesucht ist die grösste Tiefe h des Sees, über der sich genau das Boot befindet (rechts im Bild). Dazu wird ein Signal von der linken Basisstation unter dem Winkel $\alpha = 32^\circ$ losgeschickt und unter dem Winkel $\beta = 28^\circ$ bei der rechten Basisstation wieder empfangen. Die Basisstationen sind 1235 m voneinander entfernt. (Offenbar ist die Reflexion des Signals am Seeboden **nicht** nach dem Gesetz Einfallswinkel = Ausfallswinkel abgelaufen) Berechnen Sie h !



4) Das Schiff Titanic fährt um 12.00 Uhr mit dem Kurs 296° (Winkel auf dem Kompass im Uhrzeigersinn, Norden = 0°) mit der konstanten Geschwindigkeit von 30 km/h im Punkt A vorbei. Eine halbe Stunde später kreuzt ein Rettungsschiff den Punkt A mit 20 km/h und dem Kurs genau Richtung Norden. Um 13.30 Uhr (am gleichen Tag) verunglückt die Titanic.

a) (1 Punkt) Wie weit sind die Titanic und das Rettungsschiff um 13.30 Uhr vom Punkt A entfernt?

b) (4 Punkt) Wie weit ist das Rettungsschiff um 13.30 Uhr von der Titanic entfernt ? Wann (Uhrzeit) kommt das Rettungsschiff beim Unglücksort der Titanic an, wenn es sofort um 13.30 Uhr mit seiner Höchstgeschwindigkeit von 50 km/h auf geradem Kurs der Titanic zu Hilfe eilt? In welche Himmelsrichtung muss es dabei fahren?

5) (4 Punkte) Finden Sie alle Lösungen der Gleichungen zwischen 0° und 360° !

- a) $\sin(3x + 18^\circ) = 0.6$
 b) $11\cos^2x + 13\sin x + 1 = 0$

Lösungen:

$$1) \text{ a) } \sin(\alpha + 90^\circ) \stackrel{\text{Additionstheorem}}{=} \sin(\alpha) \underbrace{\cos(90^\circ)}_{=0} + \cos(\alpha) \underbrace{\sin(90^\circ)}_{=1} = \cos(\alpha)$$

$$\text{b) } \cos(180^\circ - \alpha) \stackrel{\text{Additionstheorem}}{=} \underbrace{\cos(180^\circ)}_{=-1} \cos(\alpha) + \underbrace{\sin(180^\circ)}_{=0} \sin(\alpha) = -\cos(\alpha)$$

c) linke Seite:

$$\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha)} \stackrel{\text{Addit.theorem}}{=} \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} - \frac{\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\cos(\alpha)} = \cos(\beta) - \tan(\alpha)\sin(\beta)$$

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

rechte Seite:

$$\sin(\beta) \left(\frac{1}{\tan(\beta)} - \tan(\alpha) \right) \stackrel{\tan(\beta) = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}}{=} \sin(\beta) \left(\frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} - \tan(\alpha) \right) = \cos(\beta) - \tan(\alpha)\sin(\beta)$$

(also das Gleiche wie auf der linken Seite)

Alle drei Behauptungen stimmen.

- 2) a) $\alpha = 42.79^\circ$ (Sinussatz) (2. Lösung 137.21° ist nicht möglich)
 b) $\beta = 59.30^\circ$ (Cosinussatz nach β aufgelöst)
 c) 2 Lösungen $\beta_1 = 38.06^\circ$; $\beta_2 = 141.94^\circ$ (Sinussatz) $\Rightarrow \gamma_1 = 109.94^\circ$; $\gamma_2 = 6.04^\circ$
 d) mit $r = \frac{b}{2\sin(\beta)} \left(= \frac{a}{2\sin(\alpha)} \right) \Rightarrow b = 7.66$ und $\alpha = 20.49^\circ$ ($\alpha = 159.51^\circ$ kann nicht sein, da $\beta = 50^\circ$) $\Rightarrow \gamma = 109.51^\circ \Rightarrow c = 9.43$; Die Formel $A = \frac{abc}{4r}$ führt zu $F = 12.64 \text{ cm}^2$

3) 354.78 m

- 4) a) Titanic: 45 km ; Rettungsschiff: 20 km
 b) 40.45 km \Rightarrow 14.18 Uhr und etwa 32 Sekunden ; in Richtung Süd 269.61°

- 5) a) $L = \{6.29^\circ, 41.71^\circ, 126.29^\circ, 161.71^\circ, 246.29^\circ, 281.71^\circ\}$
 b) $L = \{217.53^\circ, 322.47^\circ\}$