Prüfungsvorbereitung Vektoren: Gerade und Ebene

1) *(3 Punkte)* Bestimmen Sie Schnittpunkt und Schnittwinkel der beiden Geraden g und h!

   a) *(3 Punkte)* g: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und h: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   b) *(3 Punkte)* g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ und h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) Gegeben ist die Gerade g: $y = 3x - 2$

   a) *(2 Punkte)* Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden g!

   b) *(4 Punkte)* Spiegeln Sie den Punkt P(–1|0) an der Geraden g!

3) *(5 Punkte)* Bestimmen Sie die gegenseitige Lage der beiden Geraden g und h. Die Gerade g geht durch die Punkte A(–3|6|0) und B(–4|8|1), die Gerade h geht durch den Punkt C(4|0|–3) und verläuft parallel zur x-Achse.

4) Liegen die Punkte A und B in der Ebene E ?

   a) *(1 Punkt)* A(5|–2|6), B(4|6|2), E: $3x - 2y - 5z + 11 = 0$

   b) *(2 Punkte)* A(2|4|1), B(1|6|3), E: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

5) Bestimmen Sie in a), b) und c) jeweils eine Koordinatengleichung der Ebene E

   a) *(1.5 Punkte)* E geht durch den Punkt P(2|–3|–1) und steht senkrecht auf $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

   b) *(3 Punkte)* E enthält den Punkt P(0|–2|0) und die Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   c) *(3 Punkte)* E enthält die Punkte P(6|0|1) und Q(–1|–2|2) und ist parallel zur z-Achse.

6) In welcher speziellen Lage sind die folgenden Ebenen
   (Geht sie durch den Ursprung? Ist sie parallel zu Koordinatenachsen?)

   a) *(1 Punkt)* E: $4x - 8y + 2 = 0$

   b) *(1 Punkt)* F: $7x - 5 = 0$

   c) *(1 Punkt)* G: $y - 8z + 9 = 0$

   d) *(1 Punkt)* H: $3x + 9z = 0$

7) Gerade **h:** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, Gerade **i:** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, Ebene **G:** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$

Ebene **E:** $4x + y - 2z + 4 = 0$, Ebene **F:** $4y - 3z + 27 = 0$;

Bestimmen Sie die Schnittmengen (Schnittpunkte bzw. Schnittgeraden) von...

a) *(3 Punkte)* der Geraden h mit der Ebene F

b) *(5 Punkte)* der Geraden i mit der Ebene G

c) *(4 Punkte)* den Ebenen E und G !

Lösungen:

1) a) S(6|7); 75,96° b) S(4|2|–1); {96,50°}, also 83,50°

2) a) z.B.: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) P‘(2|–1)

3) sich schneidend in (0|0|–3)

4) a) A ja, B nein b) A ja, B ja

5) a) $x - 2y + 4z - 4 = 0$
b) $x - 2y - 3z - 4 = 0$
c) $2x - 7y - 12 = 0$

6) a) Nein, parallel zur z-Achse b) Nein, parallel zur yz-Ebene
c) Nein, parallel zur x-Achse d) Ja, parallel zur y-Achse

7) a) (39|–30|–31) b) (0|3|–1)
c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ (es gibt hier mehrere Lösungen)