

Mündliche Matura-Aufgaben: Analysis

A1) Schreiben Sie mit dem Summenzeichen. $15 + 19 + 23 + \dots + 87$

A2) Berechnen Sie: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^5}{x - x^3}$

A3) Welches Glied der Folge 8, 24, 72, 216, ... ist das erste, welches grösser als 1'000'000 ist?

A4) Berechnen Sie die Ableitung ohne den Term zu vereinfachen: $f(x) = \frac{-x^2}{1 - \sqrt{x}}$

A5) Berechnen Sie die Ableitung ohne den Term zu vereinfachen: $f(x) = x \cdot \sin(x^2)$

A6) Lösen Sie die Gleichung $3 \cdot 4^x = 6 \cdot 7^x$ nach x auf!

A7) Lösen Sie die Gleichung $8x^{-3} = 27$ ohne Taschenrechner nach x auf!

A8) Lösen Sie die Gleichung $x^{-1.5} = 64$ ohne Taschenrechner nach x auf!

A9) Wald wächst pro Jahr ca. um 4%. In diesem Jahr nimmt ein Waldstück 4800 m^3 ein. Wie gross ist es im Jahr 2050?

A10) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von $f(x) = x^2 + 3x$ im Punkt $(-1|-2)$.

A11) Berechnen Sie den Scheitelpunkt der Parabel $y = \frac{1}{3}x^2 + 0.3x + 1$

A12) Berechnen Sie alle Wendepunkte der Parabel $y = x^3 + 3x^2 - 4$

A13) Berechnen Sie die Fläche, welche von der Parabel $y = x \cdot (x - 1)$ und der x-Achse eingeschlossen wird.

A14) Skizzieren und berechnen Sie: $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

Mündliche Matura-Aufgaben: Vektorgeometrie

- V1) Gegeben sind die Punkte $A(7|-3|1)$, $B(2|0|5)$ und $C(9|-3|1)$. Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks $\triangle ABC$ und den Winkel α beim Punkt A.
- V2) Gegeben sind die Punkte $A(7|-3|1)$, $B(2|0|5)$ und $C(9|-3|1)$. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $D(4|4|4)$ zur Ebene durch die Punkte A, B und C.
- V3) Gegeben sind die Punkte $A(9|3)$, $B(-7|3)$ und $C(5|-2)$. Berechnen Sie den Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks $\triangle ABC$.
- V4) Eine quadratische Pyramide mit den an einer Kante liegenden Ecken $A(2|2|1)$ und $B(0|1|1)$ hat die Spitze $S(1|2|3)$. Die Grundfläche – also das Quadrat ABCD – liegt in der Ebene
 $E: x - 2y + 2z = 0$. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.
- V5) Gegeben sind die Punkte $A(5|-4|3)$ und $B(6|-2|3)$. Finden Sie einen Punkt C, der mit den Punkten A und B ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck bildet. (mit rechtem Winkel beim Punkt A)
- V6) Gegeben sind die Punkte $A(2|3)$ und $B(-1|7)$. Finden Sie zwei Punkte C und D, sodass A, B, C und D ein Quadrat bilden.
- V7) Bestimmen Sie die Gleichung der mittelsenkrechten Ebene der Strecke \overline{AB} . $A(3|1|1)$, $B(-5|3|7)$!
- V8) Der Punkt $P(1|8)$ geht durch eine Geradenspiegelung an der Geraden g in den Punkt $P'(-3|2)$ über. Finden Sie eine Gleichung der Geraden g!
- V9) Finden Sie die Projektion P' (den senkrechten Schatten) des Punkts $P(1|-2|3)$ auf die Ebene $E: x - z = 0$.
- V10) Die Punkte $A(1|2|-3)$ und $B(2|4|-5)$ sind aneinander liegende Ecken eines Quadrates, das in der Ebene $E: 2x - 2y - z - 1 = 0$ liegt. Berechnen Sie die Gleichung der Geraden g, auf welcher die Seite AD des Quadrates liegt.
- V11) Bestimmen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel der Geraden g und h:
 $g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- V12) Zeigen Sie dass sich die Geraden g und h schneiden und bestimmen Sie den Schnittwinkel:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 24 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- V13) Bestimme die Gleichung der Schnittgeraden sowie den Schnittwinkel der Ebenen E : $5x - y - 6z + 1 = 0$ und F : $4x + z - 3 = 0$.

- V14) Bestimme den Schnittpunkt sowie den Schnittwinkel zwischen der Geraden

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und der Ebene } E : 3x - 4y + 6 = 0.$$

- V15) Wie lautet die Gleichung der Kugel um den Ursprung, welche die Ebene der Gleichung $4x - 2y + 4z - 24 = 0$ berührt ?

- V16) Gegeben ist die Kugel k: $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 9$ und die Ebene E: $3x + 4y = 0$. Bestimmen Sie die Gleichungen der zur Ebene E parallelen Tangentialebenen der Kugel.

- V17) Gegeben ist die Kugel k: $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 9$.
Untersuche, ob sie die Ebene E: $2x + 2y + z = 7$ schneidet.

- V18) Bestimme die Schnittpunkte von der Kugel K mit Mittelpunkt $M(1|0|-3)$ und Radius $r = 5$

$$\text{und der Geraden } g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mündliche Matura-Aufgaben: Wahrscheinlichkeitsrechnung

- WK1) Ein Hersteller von Taschenrechnern verschickt eine Lieferung, obwohl 7% aller Exemplare defekt sind. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Qualitätskontrolle von 16 zufällig ausgewählten Exemplaren mindestens 2 defekte Taschenrechner dabei sind?
- WK2) Vier gleiche Würfel werden geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Würfel eine Zahl über 4 zeigt.
- WK3) Eine 21-köpfige Schulklasse umfasst 7 Frauen und 14 Männer.
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufälligen Wahl einer Neunergruppe eine Gruppe mit 7 Männern und 2 Frauen gewählt wird?
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer zufälligen Wahl des Klassenchefs und seinem Stellvertreter Martin als Chef und ein Mädchen als Stellvertreterin gewählt wird?
- WK4) Ein Zug besteht aus je einem Erst- und einem Zweitklasswagen.
- Auf wie viele Arten können 15 Personen sich auf die zwei Wagen verteilen?
 - Auf wie viele Arten können sie sich verteilen, wenn im Erstklasswagen höchstens noch 3 Personen Platz haben?
- WK5) Ein Lügendetektor wird zur Verbrechensaufklärung benutzt. Er ist zu 90% zuverlässig, wenn ein Verdächtiger schuldig ist, und zu 99% zuverlässig, wenn ein Verdächtiger unschuldig ist.
Aus einer Personengruppe, von denen 5% ein Verbrechen begangen haben, wird eine Person zufällig ausgewählt und vom Lügendetektor als schuldig ausgewiesen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person dennoch unschuldig ist?
- WK6) Mr. Burns möchte für sein Werks-Basketball-Team 9 Spieler aus dem Sektor 7G auswählen. Insgesamt arbeiten dort neben Homer Simpson noch 15 weitere Beschäftigte.
- Auf wieviele Arten kann so ein Team zusammengestellt werden ?
 - Wieviele Möglichkeiten gibt es, falls Homer dabei sein soll ?
 - Wieviele, wenn er nicht dabei sein soll ?

- WK7) An einem Pferderennen nehmen 12 Pferde teil.
- Ohne die Pferde zu kennen oder etwas vom Sport zu verstehen tippen Sie beim Wetten darauf, dass ein bestimmtes Pferd unter die ersten drei kommt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen Sie ?
 - Wieviele Tippmöglichkeiten für den Zieleinlauf der ersten 3 gibt es ?
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die drei Pferde, die auf dem Podest stehen, richtig tippen (die Reihenfolge ist egal) ?
- WK8) 12 Goldmünzen werden auf 100 Personen verteilt. Auf wieviele Arten kann man dies tun, wenn ...
- die Münzen verschieden sind und jeder höchstens eine Münze bekommen kann.
 - die Münzen gleich sind und jeder mehrere Münze bekommen darf.
- WK9) Aus 10 Kühen und 7 Bullen sollen 7 geschlechtergemischte Pärchen gebildet werden.
- Auf wieviele Arten geht das ?
 - Auf wieviele Arten kann man 5 solche Pärchen bilden ?
- WK10) Am Samstag Abend will eine Gruppe von 14 Leuten in 3 Autos zu einer Party fahren.
- Auf wieviele Arten kann man die 14 Leute auf die drei Autos verteilen ? (Dabei ist die Sitzordnung im Auto egal und in jedem Auto können beliebig viele Leute sitzen.)
 - Auf wieviele Arten geht es, wenn in jedem der (verschiedenen) Autos höchstens 5 Personen sitzen dürfen? (Dabei ist die Sitzordnung im Auto egal)
- WK11) Bei einer Aktion des Kantistopp-Teams werden 20 Essensgutscheine unter den 40 Maturanden verlost. Dabei ist es auch denkbar, dass ein Maturand mehrere Bons „einstecken“ kann.
- Wie viele Möglichkeiten gibt es ?
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Fritz genau 2 Bons bekommt ?

Analysis Lösungen

$$A1) \quad \sum_{i=3}^{21} 4i + 3 = \sum_{i=4}^{22} 4i - 1 = \sum_{i=1}^{19} 4i + 11$$

$$A2) \quad -\infty$$

A3) das 12. Glied

$$A4) \quad f'(x) = \frac{-2x \cdot (1 - \sqrt{x}) - \left[-x^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \right) \right]}{(1 - \sqrt{x})^2}$$

$$A5) \quad f'(x) = 1 \cdot \sin(x^2) + x \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$$

$$A6) \quad x = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln\left(\frac{7}{4}\right)}$$

$$A7) \quad x = \frac{2}{3}$$

$$A8) \quad x = \frac{1}{16}$$

A9) $4800 \cdot 1.04^t$, wo t die Anzahl Jahre bis 2050 sind

$$A10) \quad y = x - 1$$

$$A11) \quad S(-0.45|0.9325)$$

$$A12) \quad W(-1|-2)$$

$$A13) \quad -\frac{1}{6}$$

$$A14) \quad 1$$

Vektorgeometrie Lösungen

V1) $5; 135^\circ$

V2) $\frac{19}{5}$

V3) $M(1|5.3)$

V4) $\frac{5}{3}$

V5) \overline{AB} ist eine Kathete, \overline{AC} die andere. Es muss gelten: $|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$ (gleichschenkelig) und $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$ (90° -Winkel). Z.B. $C(3|-3|3)$ oder $C(7|-5|3)$

V6) $C_1(-5|4); D_1(-2|0)$ $C_2(3|10); D_2(6|6)$

V7) $E: 4x - y - 3z + 18 = 0$

V8) Parametergleichung: $g: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$; oder Koordinatengleichung $g: y = -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$

V9) $P'(2|-2|2)$

$$V10) \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

V11) $S(6|7); 75.96^\circ$

V12) $S(0|8|15); 65.44^\circ$

V13) $g: y = 29x - 17$ $\alpha = 64.45^\circ$

V14) $S(-10|-6|7)$ $\alpha = 7.66^\circ$

V15) $k: x^2 + y^2 + z^2 = 16$

V16) $E'_1: 3x + 4y + 15 = 0$ $E'_2: 3x + 4y - 15 = 0$

V17) k schneidet E .

V18) $S_1(-3|-3|-3); S_2(4|4|-3)$

Wahrscheinlichkeitsrechnung Lösungen

WK1) 0.310

WK2) 0.59

WK3) a) 0.245 b) 0.0167

WK4) a) 32768 b) 576

WK5) 0.174 = 17,4%

WK6) a) 11440 b) 6435 c) 5005

WK7) a) $\frac{3}{12} = 0.25$ b) 1320 c) $\frac{1}{220} = 0.0045$

WK8) a) $\frac{100!}{88!} = 5.03 \cdot 10^{23}$ b) $\binom{100+12-1}{12} = 3.94 \cdot 10^{15}$

WK9) a) 604800 b) 635040

WK10) a) 3^{14} b) $\binom{14}{5} \cdot \binom{9}{5} \cdot \binom{4}{4} \cdot 3! = 1'513'512$

WK11) a) $\binom{40+20-1}{20} = 2.79 \cdot 10^{15}$ b) $\binom{39+18-1}{18} \cdot \binom{40+20-1}{20} = 0.076$