KANTONSSCHULE ROMANSHORN **MATHEMATIK / 3 Std.**
MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2001 / 1 **Klasse 7ga / hcs**
TYPUS B

Hilfsmittel: Taschenrechner, Formelsammlung DMK
Beachten Sie: Jede Aufgabe ist auf eine separate Seite zu lösen.
Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.
Alle Aufgaben ergeben gleich viele Punkte.

(1) Gegeben sind die Punkte A(–5|4|2), B(7|–1|–2), C(–5|–2|–1) und D(5.5|–8|20), sowie die Gerade g, die durch den Punkt B geht und parallel zur y–Achse ist.

(a) Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene ABC.

(b) Bestimme den Abstand vom Punkt D zur Ebene ABC.

(c) Bestimme den Punkt der Ebene ABC, welcher den kürzesten Abstand zum Punkt D hat.

(d) Berechne den Winkel $\alpha = \angle(BAC)$.

(e) Bestimme den Abstand vom Punkt A zur Geraden g.

(2) Gegeben ist die Funktion f: $y = \dfrac{x-3}{x^2+7x+6}$

(a) Diskutiere die Funktion f. Berechne dazu:

(i) Definitionsbereich D

(ii) Nullstellen

(iii) Extrema

(iv) Asymptoten

(v) Skizziere den Graphen im Bereich $x \in [-12,12]$. Achte auf korrekte Krümmung.

(b) Berechne die Fläche zwischen dem Graphen von f, der x–Achse und den Geraden x = –10 und x = –20.

(3) Wissenschaftler führen eine Untersuchung zum Nachweis übernatürlicher Fähigkeiten von Schulkindern durch. Dabei müssen die Testpersonen vorher erraten, auf welcher Seite eine Münze landen wird. Im Verlauf der Untersuchung stellt sich heraus, dass Mädchen mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 0.6 die richtige Vorhersage machen, während Knaben in genau der Hälfte aller Fälle korrekt tippen.
Aus einer Schulklasse mit 20 Schülern (12 Mädchen und 8 Knaben) soll eine zufällig ausgewählte Gruppe von 6 Personen an der Untersuchung teilnehmen.

(a) Wieviele Möglichkeiten hat der Lehrer, eine Gruppe auszuwählen, wenn ...

(i) je drei Mädchen und drei Knaben in der Gruppe vertreten sein sollen?

(ii) mindestens zwei Mädchen und mindestens zwei Knaben in der Gruppe vertreten sein sollen?

(iii) sein Lieblingsschüler Stefan und dazu noch mindestens ein Mädchen der Gruppe angehören soll?

(b) Der Lehrer wählt eine Gruppe mit vier Mädchen und zwei Knaben.

(i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Gruppenmitglied die richtige Vorhersage macht ?

(ii) Ein zufällig ausgewähltes Gruppenmitglied hat einen richtigen Tipp abgegeben. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Mädchen war ?

(c) Ein Mädchen der Gruppe sticht besonders heraus: sie sieht den Ausgang des Münzwurfs mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% voraus. Sie soll jetzt in einem speziellen Versuch zehn Mal hintereinander das Ergebnis erraten.

(i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie genau 8 mal die richtige Vorhersage macht?

(ii) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie mindestens 6 mal die richtige Vorhersage macht?

(iii) Wieviele Male muss sie mindestens raten, damit Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98% 4 Richtige hat?

(4) Gegeben ist die Kugel K: $x^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 169$.

(a) Die Gerade g, gegeben durch die beiden Punkte A(8|–2|–5) und B(0|2|–9), schneidet die Kugel K in zwei Schnittpunkten S_1 und S_2. Bestimme eine Gleichung der Tangentialebene **im Schnittpunkt mit den ganzzahligen Koordinaten**.

(b) Die Kugel K wird mit der xy–Ebene geschnitten. Der so entstandene Kreis k ist Grundkreis eines schiefen Kegels mit der Spitze S(5|9|3). Berechne ...

(i) das Volumen des Kegels.

(ii) die Längen der längsten und kürzesten Mantellinie des Kegels ! (*Mantellinie = Strecke von der Spitze S zu einem Punkt auf dem Grundkreis.*)

(5) Für den Campingbedarf existieren Plastikbehälter mit zwei voneinander getrennten Flüssigkeiten, die beim Knicken des Behälters ineinander fliessen. Dabei entsteht eine chemische Reaktion, die der Umgebung Wärme entzieht. Die Temperatur T [in °C] in Abhängigkeit der Zeit t [in Minuten] nach dem Knicken (bei t = 0) dieses Kühlaggregats wird beschrieben durch die Gleichung:

$$T(t) = T_0 - a \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{b}}$$

wobei T_0 die Umgebungstemperatur ist (es sei hier T_0 = 20° C). a und b sind Parameter.

(a) Bei welcher Zeit t nach dem Knicken erreicht das Kühlaggregat die minimale Temperatur ?
(*Gib die Lösung in Abhängigkeit von a und/oder b an!*)

(b) Wie muss man a bei einer Umgebungstemperatur von T_0 = 20° C in Abhängigkeit von b wählen, damit die minimale Temperatur 0° C beträgt ?
(*Falls du keine Lösung für das Minimum gefunden hast, rechne weiter mit $t_{min} = 2b$.*)

(c) Wie gross sind a und b des Aggregats, das nach 20 Minuten die minimale Temperatur von T = –9.43°C erreicht? (Umgebungsemperatur T_0 = 20° C)

(d) Die Gesamtenergie, die das Kühlaggregat der Umgebung innerhalb der ersten x Minuten entziehen kann, ist gegeben durch die Gleichung

$$E(x) = \int_0^x a \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{b}}\, dt$$

Berechne die Energie, die das Kühlaggregat mit a = 5 und b = 10 der Umgebung in den ersten 30 Minuten entzieht ! Wieviel Energie kann das Aggregat insgesamt (d.h. $x \to \infty$) der Umgebung entziehen?

(6) Noch zwei unabhängige Kurzaufgaben.

(a) Ein Glücksspiel: Man darf zweimal eine Münze werfen. Fällt zweimal Kopf, so gewinnt man Fr. 15.-, fällt zweimal Zahl, so verliert man 10 Franken. Falls je einmal Kopf und einmal Zahl geworfen wird, passiert überhaupt nichts. Berechne den durchschnittlich zu erwartenden Gewinn, wenn eine Münze benützt wird, die mit 60%-iger Wahrscheinlichkeit Zahl zeigt.

(b) Von einer geometrischen Folge, die aus lauter positiven Gliedern besteht, kennt man das erste und das fünfte Glied: $a_1 = 9072$ und $a_5 = 4375$. Wie gross ist die Summe der ersten 50 Glieder der Folge in Prozent der Totalsumme aller Glieder ? Wieviele Glieder dieser Folge sind grösser als 2 ?

Viel Glück !