KANTONSSCHULE KREUZLINGEN
MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2001 / 2
TYPUS MAR

MATHEMATIK / 3 Std.
Klasse 4 MC / ho

Zeit:	180 Minuten
Hilfsmittel:	Taschenrechner, Formelsammlung DMK
Beachten Sie:	Jede Aufgabe ist auf eine separate Seite zu lösen, rechts 2 cm Rand lassen. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden. Alle Teilaufgaben sind voneinander unabhängig lösbar. Alle Aufgaben ergeben gleich viele Punkte (nämlich 10). 50 Punkte ergeben eine Sechs, 30 Punkte eine Vier.

(1) Gegeben ist die Funktion f: $y = x^3 - 4x^2 + ax + b$.

(a) Der Graph der Funktion f geht durch den Ursprung und hat an der Stelle $x = 2$ ein Extremum. Bestimmen Sie die Parameterwerte a und b.
(Falls Sie Teilaufgabe a nicht lösen können, rechnen Sie weiter mit der Funktion f: $y = x^3 - 8x^2 + 16x$.)

(b) Berechnen Sie die (endliche) Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x–Achse.

(c) t sei die Tangente an den Graphen von f im Ursprung. t schneidet den Graphen von f (ausser im Ursprung) in einem weiteren Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten von S und den Schnittwinkel der Graphen von f und t im Punkt S.

(2) Auf einem ebenen Skihang E befindet sich ein geradliniger Skilift, der die Talstation T(0|0|1) mit der Bergstation B(2|–1|2.5) verbindet. Auf dem gleichen Hang E befindet sich eine Skihütte an den Koordinaten S(1|1|1.5). (1 Einheit entspricht 1 km)

(a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E mit den Punkten T, B und S.
(Falls Sie keine Lösung finden, rechnen Sie weiter mit E: $2x - y - 8z + 14 = 0$.)

(b) Ein Skifahrer befindet sich bei dichtem Nebel an der Bergstation B und möchte zur Skihütte S. In welchem Winkel zum Skilift $\overline{BT}$ muss er losfahren und nach wievielen Minuten und Sekunden kommt er bei S an, wenn er auf direktem Weg und mit 60 km/h von B nach S fährt?

(c) Ein Flugzeug mit den Koordinaten F(3.5|–1|11) befindet sich senkrecht über dem Skihang E. Berechnen Sie den Abstand d des Flugzeugs F von der Ebene E.

(3) An einem Skirennen mit 30 Läuferinnen werden die Startnummern von 1 bis 30 zufällig gezogen.

(a) Auf wieviele Arten lassen sich die 30 Startnummern auf die 30 Skiläuferinnen verteilen ?

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 5 teilnehmenden Schweizerinnen in beliebiger Reihenfolge die Startnummern 1, 2, 3, 4 und 5 zugelost bekommen?

(c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 5 Schweizerinnen direkt aufeinanderfolgende Startnummern (z.B. 32 bis 36 oder 7 bis 11 usw.) zugelost bekommen?

(d) Nach dem Rennen werden 8 zufällig ausgeloste Skifahrerinnen zum Dopingtest bestellt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...

(i) alle 5 Schweizerinnen zum Test müssen?

(ii) höchstens eine Schweizerin zum Test muss?

(e) Man weiss, dass die Dopingtests teilweise fehlerhaft sind: Bei 10% aller gedopten Sportler kann der Test kein Doping nachweisen, bei 2% aller sauberen Sportler werden fälschlicherweise Dopingmittel nachgewiesen.
Eine unserer 30 Teilnehmerinnen ist laut Test gedopt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich dabei um eine saubere Sportlerin handelt (dass der Test also fehlschlägt), wenn wir wissen, dass von den 30 Läuferinnen tatsächlich 3 gedopt sind?

(4) Gegeben ist die Funktion f: $y = \dfrac{x+1}{x^2-5x+3}$.

(a) Diskutieren Sie die Funktion f. Berechnen Sie dazu:

(i) Definitionsbereich D

(ii) Nullstellen

(iii) Extrema

(iv) Grenzwerte bei den Definitionslücken und bei $x \to \pm\infty$.

(v) Skizzieren Sie den Graphen im Bereich $x \in [-8,8]$. Achten Sie auf korrekte Krümmung und zeichnen Sie die Asymptoten ein.

(b) Finden Sie ein Polynom (ganz rationale Funktion) P(x), sodass die Funktion g: $y = \dfrac{P(x)}{x^2-5x+3}$ die Asymptote $y = x + 1$ für $x \to \pm\infty$ besitzt.

(5) Gegeben sind die Punkte A(3|–7|12) und B(–1|1|4) sowie die Gerade g, die durch den Punkt B geht und parallel zur y–Achse ist.

(a) Berechnen Sie den Abstand d des Punktes A zur Geraden g.

(b) A und B liegen auf einem Kreis k, dessen Mittelpunkt auf der Geraden g liegt. Berechnen Sie Mittelpunkt M und Radius r des Kreises k.
(Tipp: Wo liegen die Mittelpunkte aller Kreise die durch A und B gehen?)

(c) Berechnen Sie den Öffnungswinkel des Kreissektors AMB.
(Falls Sie keine Lösung für den Mittelpunkt M gefunden haben, nehmen Sie M(–1|19|4).

(6) Nun noch zwei (mit gleich vielen Punkten bewertete) Kurzaufgaben:

(a) Das Glücksrad im Bild unten links (Abb. 1) wird zweimal gedreht. Der Sektor mit der Nummer 1 hat einen Zentriwinkel von 260°, der Sektor mit der Nummer 5 einen Zentriwinkel von 90° und der Sektor mit der Nummer 10 hat einen Zentriwinkel von 10°. Bleibt das Rad zweimal im gleichen Sektor stehen, so gewinnt man das Quadrat der erdrehten Zahl in Franken, andernfalls verliert man die Summe der beiden (verschiedenen) erdrehten Zahlen in Franken.
X sei der Gewinn/Verlust dieses Spiels. Berechnen Sie den Erwartungswert E(X) !

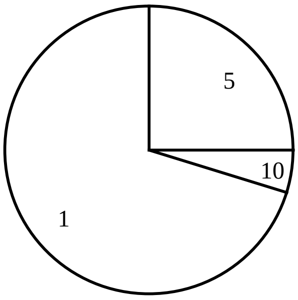

Abb.1

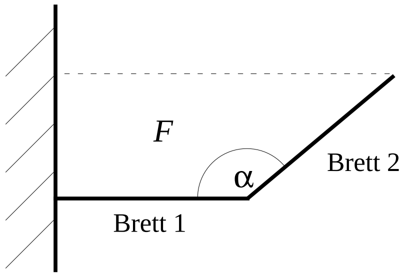

Abb.2

(b) An einer Aussenmauer eines Hauses soll eine Regenrinne mit 2 Brettern der Breite 10 cm so gebaut werden, dass die eine Seitenwand die Hausmauer ist und eines der beiden Bretter (Brett 1) waagrecht liegt (siehe Bild oben rechts, Abb. 2). Das andere Brett ist die zweite Seitenwand. Wie müssen Sie den Winkel α wählen, dass die Querschnittsfläche F der Regenrinne maximal wird?

Viel Glück !