Lösungen: (**Die Aufgaben sind fett**, die Lösungen normal geschrieben.)

(1) **Gegeben ist die Funktion f: $y = x^3 - 4x^2 + ax + b$.**

(a) **Der Graph der Funktion f geht durch den Ursprung und hat an der Stelle x = 2 ein Extremum. Bestimmen Sie die Parameterwerte a und b.**
(Falls Sie Teilaufgabe a nicht lösen können, rechnen Sie weiter mit der Funktion f: $y = x^3 - 8x^2 + 16x$.)
geht durch den Ursprung (0|0) $\Rightarrow$ f(0) = b = 0
bei x = 2 ein Extremum $\Rightarrow$ f '(2) = 0 . Mit $f'(x) = 3x^2 - 8x + a$ ist f '(2) = 12 – 16 + a = 0 für a = 4
$\underline{\underline{a = 4 ;\ b = 0}}$

(b) **Berechnen Sie die (endliche) Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x–Achse.**
Fläche liegt zwischen den Nullstellen von f: $0 = x^3 - 4x^2 + 4x$ bzw. $0 = x(x^2 - 4x + 4) \Rightarrow x = 0$ oder x = 2

$$\text{Fläche} = \int_0^2 f(x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

(c) **t sei die Tangente an den Graphen von f im Ursprung. t schneidet den Graphen von f (ausser im Ursprung) in einem weiteren Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten von S und den Schnittwinkel der Graphen von f und t im Punkt S.**
Gleichung der Gaeraden g: Ansatz y = mx + q. Der Achsenabschnitt q ist Null, da g durch den Ursprung geht. Die Steigung m ist gleich der Steigung des Graphen von f bei x = 0, also f '(0) = 4 (siehe oben)
$\Rightarrow$ g: y = 4x
Für die Schnittpunkte setzte f(x) = g(x): $x^3 - 4x^2 + 4x = 4x \Rightarrow x^3 - 4x^2 = 0$ Ausklammern führt zu x = 0 und x = 4. Der zweite Schnittpunkt ist also S(4|16)
Für den Winkel braucht man die Steigungen der Graphen beim Schnittpunkt S: g hat immer die Steigung $m_g = 4$. Die Steigung von f ist $m_f = f'(4) = 20$ (Ableitung siehe oben.)
$\Rightarrow \alpha = |\arctan(20) - \arctan(4)| = \underline{\underline{11.17°}}$

(2) **Auf einem ebenen Skihang E befindet sich ein geradliniger Skilift, der die Talstation T(0|0|1) mit der Bergstation B(2|–1|2.5) verbindet. Auf dem gleichen Hang E befindet sich eine Skihütte an den Koordinaten S(1|1|1.5).**
(1 Einheit entspricht 1 km)

(a) **Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E mit den Punkten T, B und S.**
(Falls Sie keine Lösung finden, rechnen Sie weiter mit E: 2x – y – 8z + 14 = 0 .)
Der Normalenvektor $\vec{n}_E$ steht senkrecht auf z.B. $\overrightarrow{BT} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1.5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \overrightarrow{BT} \times \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \\ -3 \end{pmatrix}$,
wobei man $\vec{n}_E$ mit 2 "erweitern" kann: $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$

Der Ansatz für die Koordinatengleichung von E lautet: $4x - y - 6z + d = 0$.
Setze nun für x, y und z z.B. die Koordinaten des Punktes $T \in E$ ein: $4 \cdot 0 - 0 - 6 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 6$
$\Rightarrow$ $\underline{\underline{E: 4x - y - 6z + 6 = 0}}$

(b) **Ein Skifahrer befindet sich bei dichtem Nebel an der Bergstation B und möchte zur Skihütte S. In welchem Winkel zum Skilift $\overline{BT}$ muss er losfahren und nach wievielen Minuten und Sekunden kommt er bei S an, wenn er auf direktem Weg und mit 60 km/h von B nach S fährt?**

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{BT}}{\left|\overrightarrow{BS}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BT}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1.5 \end{pmatrix}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{7.25}} = 0.8339 \;\Rightarrow\; \alpha = \underline{\underline{33.50°}}$$

(c) **Ein Flugzeug mit den Koordinaten F(3.5|–1|11) befindet sich senkrecht über dem Skihang E. Berechnen Sie den Abstand d des Flugzeugs F von der Ebene E.**

$$\text{HNF: } \pm d(F,E) = \frac{4x - y - 6z + 6}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-6)^2}} = \frac{4 \cdot 3.5 - (-1) - 6 \cdot 11 + 6}{\sqrt{53}} = \underline{-6.18} \text{ also } \underline{\underline{6.18\text{ km}}}$$

(3) **An einem Skirennen mit 30 Läuferinnen werden die Startnummern von 1 bis 30 zufällig gezogen.**

(a) **Auf wieviele Arten lassen sich die 30 Startnummern auf die 30 Skiläuferinnen verteilen ?**
$\underline{\underline{30! = 2.653 \cdot 10^{32}}}$

(b) **Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 5 teilnehmenden Schweizerinnen in beliebiger Reihenfolge die Startnummern 1, 2, 3, 4 und 5 zugelost bekommen?**
total möglich sind 30! Fälle. Günstig für die Schweizerinnen sind die Fälle, wo die Nummern 1 bis 5 auf sie aufgeteilt werden (geht auf 5! Arten). Die anderen Läuferinnen können ihre Nummern noch auf 25! Arten verteilen $\Rightarrow p = \frac{5! \cdot 25!}{30!} = \underline{\underline{7.017 \cdot 10^{-6}}}$

(c) **Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die 5 Schweizerinnen direkt aufeinanderfolgende Startnummern (z.B. 32 bis 36 oder 7 bis 11 usw.) zugelost bekommen?**
wie bei b) ausser, dass noch die Nummernblöcke 1 bis 5, 2 bis 6, 3 bis 7 , ... , 26 bis 30 für die Schweizerinnen zur Wahl stehen insgesamt 26 solche Blöcke $\Rightarrow p = \frac{26 \cdot 5! \cdot 25!}{30!} = \underline{\underline{1.824 \cdot 10^{-4}}}$

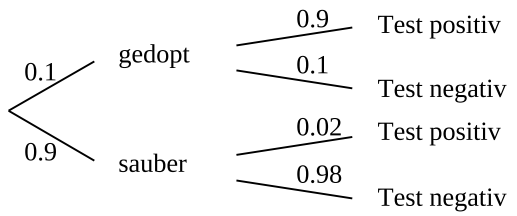
(d) **Nach dem Rennen werden 8 zufällig ausgeloste Skifahrerinnen zum Dopingtest bestellt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ...**

(i) **alle 5 Schweizerinnen zum Test müssen?**
totale Anzahl Möglichkeiten: Aus 30 Läuferinnen 8 Stück ziehen: $\binom{30}{8}$
"günstig" sind 5 aus 5 Schweizerinnen, 3 aus den restlichen 25: $p = \frac{\binom{5}{5} \cdot \binom{25}{3}}{\binom{30}{8}} = \underline{\underline{3.93 \cdot 10^{-4}}}$

(ii) **höchstens eine Schweizerin zum Test muss?**
wie vorher, aber keine (0 aus 5) oder eine Schweizerin (1 aus 5) ist möglich:

$$p = \frac{\text{keine CH} + \text{eine CH}}{\text{total möglich}} = \frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{25}{8} + \binom{5}{1}\cdot\binom{25}{7}}{\binom{30}{8}} = \underline{\underline{0.595}}$$

(e) **Man weiss, dass die Dopingtests teilweise fehlerhaft sind: Bei 10% aller gedopten Sportler kann der Test kein Doping nachweisen, bei 2% aller sauberen Sportler werden fälschlicherweise Dopingmittel nachgewiesen.**
Eine unserer 30 Teilnehmerinnen ist laut Test gedopt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich dabei um eine saubere Sportlerin handelt (dass der Test also fehlschlägt), wenn wir wissen, dass von den 30 Läuferinnen tatsächlich 3 gedopt sind?



Wahrscheinlichkeit, dass Test positiv herauskommt:
P(Test positiv) = $0.1\cdot 0.9 + 0.9\cdot 0.02 = 0.108$

Wahrscheinlichkeit, dass man sauber ist und der Test positiv herauskommt:
P(sauber + Test positiv) = $0.9\cdot 0.02 = 0.018$

Wahrscheinlichkeit, dass Läuferin sauber ist, wenn der Test positiv war:
p(sauber,wenn Test positiv) = $\frac{0.018}{0.108} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$

(4) **Gegeben ist die Funktion f: y =** $\dfrac{x+1}{x^2-5x+3}$**.**

(a) **Diskutieren Sie die Funktion f. Berechnen Sie dazu:**

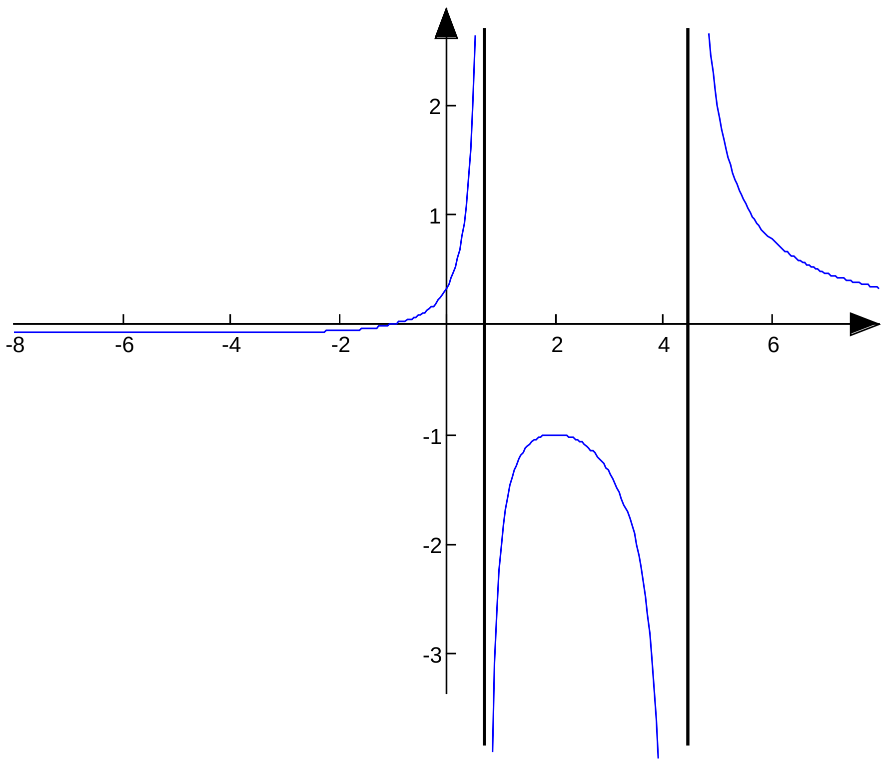
(i) **Definitionsbereich D**
Nenner wird Null für x = 4.303 und x = 0.697 (quadratische Gleichung)
$\Rightarrow \underline{D = \mathbb{R} \setminus \{4.303, 0.697\}}$

(ii) **Nullstellen**
Zähler wird Null für $\underline{\underline{x = -1}}$

(iii) **Extrema**
$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-5x+3)-(x+1)\cdot(2x-5)}{(x^2-5x+3)^2}$$ wird Null, wenn der Zähler Null ist $\Rightarrow$ x = 2 oder x = –4
$\Rightarrow \underline{E_1(-4|-0.077)\ ;\ E_2(2|-1)}$

(iv) **Grenzwerte bei den Definitionslücken und bei $x \to \pm\infty$.**
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ x-Achse (Gleichung y = 0) ist Asymptote
$\lim\limits_{\substack{x\to 4.3\\ x<4.3}} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 4.3\\ x>4.3}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0.697\\ x<0.697}} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0.697\\ x>0.697}} f(x) = -\infty$

(v) **Skizzieren Sie den Graphen im Bereich $x \in [-8,8]$. Achten Sie auf korrekte Krümmung und zeichnen Sie die Asymptoten ein.**



(b) **Finden Sie ein Polynom (ganz rationale Funktion) P(x), sodass die Funktion g: $y = \dfrac{P(x)}{x^2 - 5x + 3}$ die Asymptote $y = x + 1$ für $x \to \pm\infty$ besitzt.**

Es muss (bei der schriftlichen Division) gelten: $P(x):(x^2 - 5x + 3) = x + 1 + \ldots.$ Oder umgekehrt:

$P(x) = (x^2 - 5x + 3)\cdot(x + 1 + \ldots.) = x^3 + x^2 - 5x^2 - 5x + 3x + 3 + \ldots.. = x^3 + - 4x^2 - 2x + 3 + \ldots..$

$\Rightarrow \underline{\underline{P(x) = x^3 + - 4x^2 - 2x + \ldots}}$

(5) **Gegeben sind die Punkte A(3|–7|12) und B(–1|1|4) sowie die Gerade g, die durch den Punkt B geht und parallel zur y–Achse ist.**

(a) **Berechnen Sie den Abstand d des Punktes A zur Geraden g.**

g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mit der Formel für Abstand Punkt-Gerade folgt:

$$d(g, A) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \overrightarrow{BA}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right|}{1} = \underline{\underline{8.94}}$$

(b) **A und B liegen auf einem Kreis k, dessen Mittelpunkt auf der Geraden g liegt. Berechnen Sie Mittelpunkt M und Radius r des Kreises k.**
(Tipp: Wo liegen die Mittelpunkte aller Kreise die durch A und B gehen?)

Die Mittelpunkte aller Kreise durch A und B liegen auf der Mittelsenkrechtebene E. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -8 \end{pmatrix}$ ist Normalenvektor dieser Ebene und der Mittelpunkt M_{AB} der Strecke $\overline{AB}$ liegt auf E: M_{AB} hat die Koordinaten $\frac{1}{2}\cdot(3-1\,|\,-7+1\,|\,12+4) = (1\,|\,-3\,|\,8)$. Den Normalenvektor von E kann man mit –4 kürzen und man erhält als Ansatz für die Ebenengleichung: $x - 2y + 2z + d = 0$. Setzt man die Koordinaten von M_{AB} ein, so folgt:
$1 - 2\cdot(-3) + 2\cdot 8 + d = 0 \Rightarrow d = -23 \Rightarrow$ E: $x - 2y + 2z - 23 = 0$
Der Mittelpunkt M des Kreises liegt auf der Geraden g und auf E ⇒ Schneide E mit g:
$(-1 + 0\cdot t) - 2(1 + t) + 2(4 + 0\cdot t) - 23 = 0 \Rightarrow t = -9 \Rightarrow \underline{\underline{M(-1|-8|4)}}$
Der Radius ist z.B. $r = \left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{81} = \underline{9}$

(c) **Berechnen Sie den Öffnungswinkel des Kreissektors AMB.**
(Falls Sie keine Lösung für den Mittelpunkt M gefunden haben, nehmen Sie M(–1|19|4).

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{\left|\overrightarrow{MA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{MB}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{81}\cdot\sqrt{81}} = \frac{1}{9} \Rightarrow \alpha = \underline{\underline{83.62°}}$$

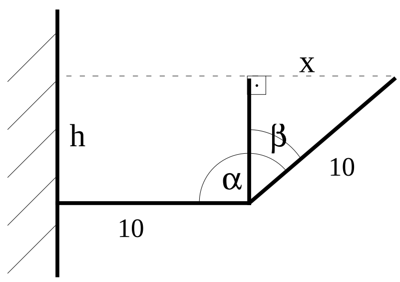
(6) **Nun noch zwei (mit gleich vielen Punkten bewertete) Kurzaufgaben:**

(a) **Das Glücksrad im Bild unten links (Abb. 1) wird zweimal gedreht. Der Sektor mit der Nummer 1 hat einen Zentriwinkel von 260°, der Sektor mit der Nummer 5 einen Zentriwinkel von 90° und der Sektor mit der Nummer 10 hat einen Zentriwinkel von 10°. Bleibt das Rad zweimal im gleichen Sektor stehen, so gewinnt man das Quadrat der erdrehten Zahl in Franken, andernfalls verliert man die Summe der beiden (verschiedenen) erdrehten Zahlen in Franken.**
X sei der Gewinn/Verlust dieses Spiels. Berechnen Sie den Erwartungswert E(X) !
Verteilung:

Wert von X	$1^2 = 1$	$5^2 = 25$	$10^2 = 100$	$-1-5=-6$	$-1-10=-11$	$-5-10=-15$
P(X=...)	$\frac{260}{360}\cdot\frac{260}{360}$	$\frac{90}{360}\cdot\frac{90}{360}$	$\frac{10}{360}\cdot\frac{10}{360}$	$\frac{260}{360}\cdot\frac{90}{360}+\frac{90}{360}\cdot\frac{260}{360}$	$\frac{260}{360}\cdot\frac{10}{360}+\frac{10}{360}\cdot\frac{260}{360}$	$\frac{90}{360}\cdot\frac{10}{360}+\frac{10}{360}\cdot\frac{90}{360}$

$\Rightarrow E(X) = 1\cdot\frac{260}{360}\cdot\frac{260}{360} + 25\cdot\frac{90}{360}\cdot\frac{90}{360} + ... + (-15)\cdot\left(\frac{90}{360}\cdot\frac{10}{360}+\frac{10}{360}\cdot\frac{90}{360}\right) = \underline{\underline{-0.655\text{ (Franken)}}}$

(b) **An einer Aussenmauer eines Hauses soll eine Regenrinne mit 2 Brettern der Breite 10 cm so gebaut werden, dass die eine Seitenwand die Hausmauer ist und eines der beiden Bretter (Brett 1) waagrecht liegt (siehe Bild oben rechts, Abb. 2). Das andere Brett ist die zweite Seitenwand. Wie müssen Sie den Winkel α wählen, dass die Querschnittsfläche F der Regenrinne maximal wird?**
Mit den Bezeichnungen wie im Bild rechts ist $\beta = \alpha - 90°$ und im rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten h, 10 und x und dem Winkel β gilt: $\cos(\beta) = \frac{h}{10} \Rightarrow h = 10\cdot\cos(\beta)$
sowie: $\sin(\beta) = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 10\cdot\sin(\beta)$
Damit ist die Fläche F gleich der Fläche des Rechtecks (10·h) plus der Fläche des Dreiecks ($\frac{1}{2}\cdot x\cdot h$). Setzt man die Terme in Abhängigkeit von β ein:



$F = 10 \cdot 10 \cdot \cos(\beta) + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sin(\beta) 10 \cdot \cos(\beta) =$

$F = 100 \cdot \cos(\beta) + 50 \cdot \sin(\beta) \cdot \cos(\beta)$

Ableiten nach β ergibt: $F' = -100 \cdot \sin(\beta) + 50[\cos^2(\beta) - \sin^2(\beta)]$. Dies muss man Null setzten.

Mit $\cos^2(\beta) = 1 - \sin^2(\beta)$ folgt: $-2 \cdot \sin(\beta) + 1 - 2\sin^2(\beta) = 0$. Dies ist eine quadratische Gleichung in $\sin(\beta)$ mit der Lösung $\sin(\beta) = 0.366 \Rightarrow \beta = 21.47°$

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 111.47°}}$

Es gibt noch eine alternative Lösung, bei der man mit Pythagoras x durch h ausdrückt: $x = \sqrt{100 - h^2}$ *. Die Fläche ist dann:* $F = 10 \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{100 - h^2} \cdot h$. *Dies muss man Ableiten, Null setzen und nach h auflösen.* α *findet man wieder mit der obigen Beziehung* $\cos(\beta) = \frac{h}{10}$ *, wobei* $\beta = \alpha - 90°$.