KANTONSSCHULE ROMANSHORN
MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2002
TYPUS MAR

MATHEMATIK - 3 Std.
Klasse 4 MD - hcs

Zeit: 180 Minuten
Hilfsmittel: Taschenrechner, Formelsammlung DMK
Beachten Sie: Jede Aufgabe ist auf eine separate Seite zu lösen, rechts 2 cm Rand lassen.
Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.
Alle Teilaufgaben sind voneinander unabhängig lösbar.
Alle Aufgaben ergeben gleich viele Punkte (nämlich 10).
50 Punkte ergeben eine Sechs, 30 Punkte eine Vier.
Der Lösungsweg muss ersichtlich sein !

(1) Zuerst zwei (mit gleich vielen Punkten bewertete) Kurzaufgaben:

(a) Nach der Matura bekommen alle 18 Schüler (davon 10 Mädchen) einer Klasse ein Geschenk: Insgesamt sind es 12 gleiche Blumensträusse und 6 verschiedene Bücher.

(i) Auf wieviele Arten kann der Rektor die Geschenke verteilen ?

(ii) Auf wieviele Arten kann der Rektor die Geschenke verteilen, wenn jedes Mädchen einen Blumenstrauss erhalten soll ?

(iii) Von einer anderen Klasse sind 15 gleiche Blumensträusse übriggeblieben. Auf wieviele Arten lassen sich diese unter den 10 Mädchen der Klasse aufteilen, wenn jedes Mädchen beliebig viele Blumensträusse behalten darf ?

(b) Im Jahr 1981 lebten 4.508 Milliarden Menschen auf der Erde, im Jahr 2000 waren es 6.267 Milliarden. Zwei Wissenschaftler A und B sollen die Entwicklung der Weltbevölkerung voraussagen. A tut dies mit der Exponentialformel $B(t) = B_0 \cdot q^t$. B benützt als Modell eine arithmetische Folge, das heisst bei B ist der Zuwachs jedes Jahr konstant. Wie gross schätzen A und B die Erdbevölkerung im Jahr 2010, und in welchem Jahr überschreitet nach den Meinungen von A und B die Bevölkerung die 10-Milliarden-Grenze ?

(2) Die Punkte A, B, C, D, E, F, G und H sind die Eckpunkte eines Würfels (siehe Bild im Anhang). Die Punkte A, B, C und D liegen auf der Ebene E: $x - 2y - 2z - 4 = 0$. Man kennt den Eckpunkt $H(4|1|8)$ und den Diagonalenschnittpunkt der Deckfläche $M_D(4|4|5)$.

(a) Unter welchem Winkel schneidet die Ebene E die xy-Ebene?

(b) Bestimmen Sie die fehlende Koordinate z_B des Punktes $B(6|3|z_B)$.

(c) Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalenschnittpunktes der Grundfläche.

(d) Geben Sie die Gleichung der Umkugel des Würfels an.

(e) $S(8|-4|-3)$ ist die Spitze einer geraden quadratischen Pyramide. Die Punkte E, F, G und H liegen auf den vier Seitenkanten der Pyramide. Die Eckpunkte A', B', C' und D' der Grundfläche der gesuchten Pyramide A'B'C'D'S liegen auf der Ebene E. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D' und das Volumen der Pyramide A'B'C'D'S.

(3) Gegeben ist die Funktion f: $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x + 3}$

(a) Diskutieren Sie die Funktion f. Berechnen Sie dazu den Definitionsbereich D, die Nullstellen, die Ableitung von f und daraus die Extrema, die Polstellen, die Grenzwerte bei den Definitionslücken für $x \to \pm\infty$ sowie die Gleichung der Asymptoten für $x \to \pm\infty$. Skizzieren Sie den Graphen im Bereich
$x \in [-8,8]$.

(b) Eine Gerade g mit negativer Steigung m schneidet den Graphen der Funktion f bei x = 6 unter einem Winkel von 60°. Berechnen Sie die Gleichung dieser Geraden.
(*Werte auf 3 Stellen nach dem Komma runden.)*

(4) Ein fairer Würfel(alle Seiten des Würfels werden gleich häufig geworfen) ist ungewöhnlich beschriftet: er trägt auf seinen sechs Flächen die Zahlen 2, 2, 2, 2, 5, 5.

(a) X bezeichne die beim einmaligen Werfen des Würfels geworfenen Augenzahl.

(i) Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in einer Tabelle dar.

(ii) Berechnen Sie den Erwartungswert von X.

(b) Dieser Würfel wird nun solange geworfen, bis die Augensumme mindestens sieben beträgt.

(i) Stellen Sie dieses Experiment mit Angabe aller Wahrscheinlichkeiten in einem Baumdiagramm dar.

(ii) Die Zufallsvariable Z sei die Anzahl der benötigten Würfe, um mindestens die Augensumme sieben zu erzielen. Stellen Sie tabellarisch die Verteilung von Z dar, und berechnen Sie die durchschnittliche Anzahl der nötigen Würfe.

(c) Zwei Spieler A und B machen eine Wette. Spieler A besitzt den oben beschriebenen Würfel, Spieler B einen gewöhnlichen Würfel mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6. Jeder würfelt einmal mit seinem Würfel. B gewinnt, wenn er eine höhere Augenzahl wirft als A, sonst gewinnt A. Stellen Sie die möglichen Spielausgänge in einer Tabelle dar und berechnen Sie, ob das Spiel fair ist, das heisst, ob jeder Spieler die gleiche Chance auf einen Sieg hat.

(d) Der Würfel mit den Zahlen 2, 2, 2, 2, 5, 5 wird nun achtmal geworfen. Y bezeichne die Augensumme aller acht Würfe.

(i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau dreimal die 2 geworfen wird ?

(ii) Welche Werte kann Y annehmen ?

(iii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme Y den Wert 25 annimmt.

(5) Im Jahr 2300 baut die Erde eine Weltraumstation, die mit einem Erkundungsraumschiff ausgerüstet ist. Prompt nimmt ein ausserirdisches Raumschiff Kontakt mit der Erde auf und übermittelt die Warnung: "*Jeder Mensch, der die Grenzebene E: $5x - 28y + 1618 = 0$ überschreitet, wird eliminiert. Das Koordinatensystem haben wir so gewählt, das eure Raumstation S(0|0|0) auf eurer Seite der Grenze im Urpsrung liegt und eine Einheit 1000 km entspricht.*" Schnell berechnen Sie die momentanen Koordinaten R(–20|112|–17) des Erkundungsraumschiffs und stellen fest, dass es tatsächlich auf der anderen Seite der Grenze liegt.

(a) Wie weit (auf km genau) sind die Station S und das Raumschiff R von der Grenze entfernt ?

(b) Begründen Sie rechnerisch, wieso Raumschiff R und Station S auf verschiedenen Seiten der Grenzebene E liegen.

(c) Das Raumschiff fliegt auf direktem Weg zur Station zurück. In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneidet es die Grenzebene ?

(d) Die Ausserirdischen bauen ebenfalls eine Raumstation und zwar genau symmetrisch zur Raumstation S der Erde bezüglich der Grenzebene E. Berechnen Sie die Koordinaten der ausserirdischen Station.

(6) Gegeben ist die Funktion: $f(x) = -0.035 \cdot \left(\frac{x}{2} - 25\right)\sqrt{10x - x^2}$

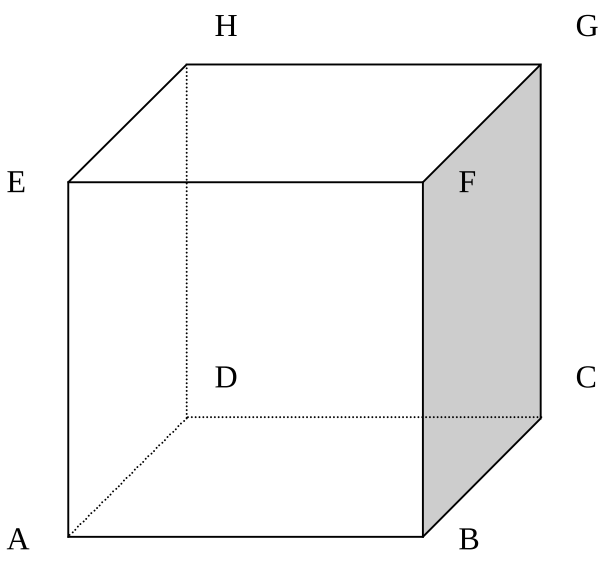
(a) Bestimmen Sie Definitions- und Wertebereich von f(x).

(b) Die Funktion f rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.

(c) F ist die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion über dem Definitionsbereich und der x-Achse. Diese soll durch 5 gleichbreite Rechtecke angenähert werden, die nebeneinander, als Streifen über der x-Achse angeordnet sind. Die zusammengesetzte Fläche der Rechtecke soll die Fläche F gerade noch überdecken (Obersumme). Bestimmen Sie die Gesamtfläche der 5 Rechtecke.

(d) Bestimmen Sie einen Punkt P auf der x-Achse, so dass das rechtwinklige Dreieck O(0,0), P(x,0), Q(x,f(x)) maximale Fläche hat.

Viel Glück !



zu Aufgabe 2