Lösungen: (**Die Aufgaben sind fett**, die Lösungen normal geschrieben.)

1) **Jeder Mensch hat Blut einer bestimmten Blutgruppe. Der Tabelle unten entnimmt man die Anteile von drei speziellen Blutgruppen in einer Bevölkerung:**

Blutgruppe	AB negativ	B positiv	A positiv
Anteil	$\frac{1}{100}$	$\frac{11}{100}$	$\frac{1}{3}$

a) ***(3 Punkte)*** **An einem Tag werden 18 Blutspender erwartet.**

i) **Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist unter den 18 beliebig ausgewählten Blutspendern keiner mit den drei oben aufgeführten Blutgruppen AB negativ, B positiv, A positiv ?**

P(weder AB neg. noch B pos. noch Apos.) = $\frac{1}{100} + \frac{11}{100} + \frac{1}{3} = \frac{34}{75}$

$B(18, \frac{34}{75};0) = \binom{18}{0} \cdot \left(\frac{34}{75}\right)^0 \cdot \left(\frac{41}{75}\right)^{18} = \underline{\underline{0.0000190}}$ (oder = $B(18, \frac{41}{75};18)$)

ii) **Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter den 18 beliebig ausgewählten Blutspendern höchstens zwei mit der Blutgruppe AB negativ ?**

$B(18, \frac{1}{100};k \le 2) = \sum_{k=0}^{2} B(18, \frac{1}{100};k) =$

$\binom{18}{0} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^{18} + \binom{18}{1} \cdot 0.01^1 \cdot 0.99^{17} + \binom{18}{2} \cdot 0.01^2 \cdot 0.99^{16} = \underline{\underline{0.999271}}$

b) ***(2.5 Punkte)*** **Man benötigt dringend die Blutgruppe AB negativ. Wieviele Spender benötigt man mindestens, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% wenigstens ein Spender mit der Blutgruppe AB negativ dabei ist ?**

gesucht ist n (= Anzahl Spender), sodass gilt $B(n, \frac{1}{100};k \ge 1) \ge 99\%$. Statt mindestens einen Erfolg mit mehr als 99% zu betrachten kann man auch das Gegenteil, keinen Erfolg mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 1% anschauen:

$\Rightarrow B(n, \frac{1}{100};0) \le 1\% \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{0} \cdot 0.01^0 \cdot 0.99^n \le 0.01$

Mit $\binom{n}{0} \cdot 0.01^0 = 1$ folgt: $0.99^n \le 0.01$

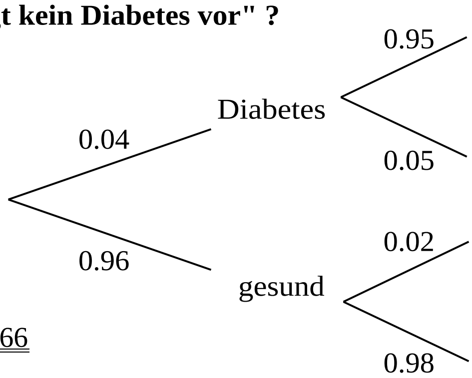
Logarithmieren ergibt: $n \cdot \ln(0.99) \le \ln(0.01) \Rightarrow n \ge 458.21$

$\Rightarrow$ Man benötigt mindestens 459 Spender

c) ***(4.5 Punkte)*** **Zur Blutspende werden nur gesunde Menschen zugelassen. 4% der Bevölkerung leiden jedoch unter einem nicht diagnostizierten Diabetes. Deswegen wird bei allen Blutspendern ein Schnelltest angewandt, der jedoch nicht vollständig sicher ist: So werden an Diabetes Erkrankte nur zu 95% erkannt, während 2% der gesunden Personen als Diabetiker eingestuft werden. (Zeichnen Sie, falls nötig, einen Baum.)**

i) **Ein zufällig ausgewählter Spender erscheint zum Schnelltest. Mit welcher Wahrscheinlichkeit lautet das Testergebnis "es liegt kein Diabetes vor" ?**

P(Test negativ) = $0.04 \cdot 0.05 + 0.96 \cdot 0.98 = \underline{\underline{0.94280}}$



ii) **Ein Spender wird vom Test als Diabetiker ausgewiesen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er dennoch keinen Diabetes hat ?**

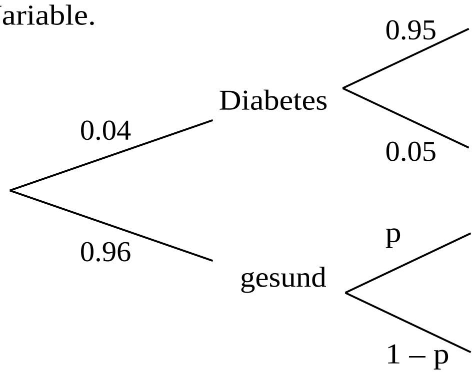
P(Gesund|Test positiv) = $\frac{0.96 \cdot 0.02}{0.96 \cdot 0.02 + 0.04 \cdot 0.95} = \underline{\underline{0.33566}}$

iii) **Der Test wird so verbessert, dass Diabetiker immer noch mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% erkannt werden, gesunde Personen werden aber mit einer kleineren Wahrscheinlichkeit p fälschlicherweise als krank eingestuft. Nun hat eine als Diabetiker eingestufte Person nur noch mit einer Wahrscheinlichkeit von 13% keinen Diabetes. Wie gross ist p ?**

Neuer Baum (siehe rechts) mit p als die gesuchte Variable.

P(Gesund|Test positiv) = $\frac{0.96 \cdot p}{0.96 \cdot p + 0.04 \cdot 0.95}$. Dies muss dann die gewünschten 13% ergeben:

$$\frac{0.96 \cdot p}{0.96 \cdot p + 0.04 \cdot 0.95} = 0.13$$



$\Rightarrow p = 0.00591 = \underline{\underline{0.591\%}}$

2) Es seien die Punkte A(5|5|–3), B(3|4|–1) und C(5|2|0) sowie die Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ **gegeben.**

a) ***(1.5 Punkte)*** **Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E durch die Punkte A, B und C.**

Normalenvektor der Ebene E: $\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$, welcher parallel zu $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist. Ein Ansatz für die Koordinatengleichung von E ist also: $x + 2y + 2z + D = 0$.
Setzt man die Koordinaten von z.B. Punkt A ein (da dieser auf E liegt, erfüllt er die Gleichung): $5 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) + D = 0 \;\Rightarrow\; D = -9 \;\Rightarrow\;$ $\underline{\underline{E: x + 2y + 2z - 9 = 0}}$

b) ***(2 Punkte)*** **Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g und der Ebene E.**

In der Gerdengleichung drückt man die Koordinaten x, y und z mit Hilfe des Parameters t aus und setzt diese Ausdrücke in die Ebenengleichung von E ein:

$$\left.\begin{array}{r} x = 8 + 2t \\ y = 5 + t \\ z = -3 - t \end{array}\right\} \text{ in E: } (8 + 2t) + 2 \cdot (5 + t) + 2 \cdot (-3 - t) - 9 = 0 \;\Rightarrow\; t = -1.5$$

Nun setzt man $t = -1.5$ in die Geradengleichung ein $\Rightarrow$ Schnittpunkt $\underline{\underline{S(5|3.5|-1.5)}}$

c) ***(2 Punkte)*** **Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AC bilden.**

Man muss beweisen, dass die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ gleich lang sind und einen rechten Winkel einschliessen.

- $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ stehen rechtwinklig aufeinander, da das Skalarpudukt der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$ gleich Null ist: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 0$
- $\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3 = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \overline{BC} \;\Rightarrow$ Länge gleich.

d) ***(1.5 Punkte)*** **Bestimmen Sie den Punkt D so, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.**

Aus einer Skizze erkennt man, dass man den Punkt D bekommt, indem man zum Punkt A den Vektor $\overrightarrow{BC}$ addiert: $\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$ $\underline{\underline{D(7|3|-2)}}$

e) ***(3 Punkte)*** **Finden Sie alle Punkte S $\in$ g, die mit dem Quadrat ABCD eine (nicht notwendigerweise gerade) Pyramide mit dem Volumen 18 bilden.**

(Sie brauchen dafür den Punkt D aus Teilaufgabe d nicht !)

Da man den Inhalt der Grundfläche und das Volumen der Pyramide kennt, kann man die Höhe berechnen: $V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = 18$

G ist ein Quadrat mit der Seite $\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3 \Rightarrow G = 3^2 = 9$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot h = 18 \Rightarrow \underline{h = 6}$$

Nun hat S von der Ebene E (in der das Quadrat ABCD liegt) einen Abstand von 6, was ja der Höhe der Pyramide entspricht. Setzt man also die Koordinaten von S(x|y|z) in die HNF (Hessesche Normalform) ein, so erhält man 6 oder –6:

$$\pm 6 = \frac{x + 2y + 2z - 9}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{x + 2y + 2z - 9}{3}$$

Weiter liegt der gesuchte Punkt S(x|y|z) auf g, erfüllt also die Geradengleichung. Man kann also die Koordinaten von S durch den Parameter t der Geradengleichung ausdrücken: S(x|y|z) = S(8+2t|5+t|–3–t). Dies setzen wir nun in die HNF–Gleichung oben ein:

$$\pm 6 = \frac{(8 + 2t) + 2(5 + t) + 2(-3 - t) - 9}{3} \qquad | \cdot 3$$

$$\pm 18 = 3 + 2t$$

$$\Rightarrow \quad t = 7.5 \quad \text{oder} \quad t = -10.5$$

Setzt man die beiden Lösungen für t in die Geradengleichung ein, so erhält man die beiden Lösungen für den Punkt S: $\underline{\underline{S_1(23|12.5|-10.5)}}$ und $\underline{\underline{S_2(-13|-5.5|7.5)}}$

3) Gegeben ist die Funktion f: $y = \dfrac{8x-4}{x^2+4x}$ **.**

a) ***(5.5 Punkte)*** **Diskutieren Sie die Funktion f. Berechnen Sie dazu:**

i) den Definitionsbereich

Der Nenner $x^2 + 4x$ darf nicht Null sein: $x^2 + 4x = x\cdot(x + 4)$ und dies ist Null, wenn $x = 0$ oder wenn $x = -4$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{D = \mathbb{R} \setminus \{-4\ ,\ 0\}}}$

ii) die Nullstellen

Der Bruch ist Null, wenn der Zähler $8x - 4$ gleich Null ist. $\Rightarrow$ NS $\underline{\underline{x = 0.5}}$

iii) die Extrema

Extrema können dort sein, wo die 1. Ableitung Null ist:

$$f'(x) = \frac{8\cdot(x^2+4x)-[(8x-4)\cdot(2x+4)]}{(x^2+4x)^2} \qquad \text{(Quotientenregel)}$$

$$\frac{8\cdot(x^2+4x)-[(8x-4)\cdot(2x+4)]}{(x^2+4x)^2} = 0 \qquad |\cdot\text{Nenner}$$

$$8\cdot(x^2+4x)-[(8x-4)\cdot(2x+4)] = 0$$

$$-x^2+x+2 = 0$$

$$(-x+2)\cdot(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 2 \text{ oder } x = -1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{E_1(-1|4) \text{ und } E_2(2|1)}}$$

iv) die Grenzwerte bei den Definitionslücken und bei $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x-4}{x^2+4x}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{8}{x}-\frac{4}{x^2}}{1+\frac{4}{x}} = \frac{0-0}{1+0} = 0$$

analog ist $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{8x-4}{x^2+4x} = 0$

Für die Grenzwerte bei den Definitionslücken betrachtet man am besten die Funktionsgleichung in der ausgeklammerten Form: $f(x) = \dfrac{8x-4}{x^2+4x} = \dfrac{8x-4}{x\cdot(x+4)}$

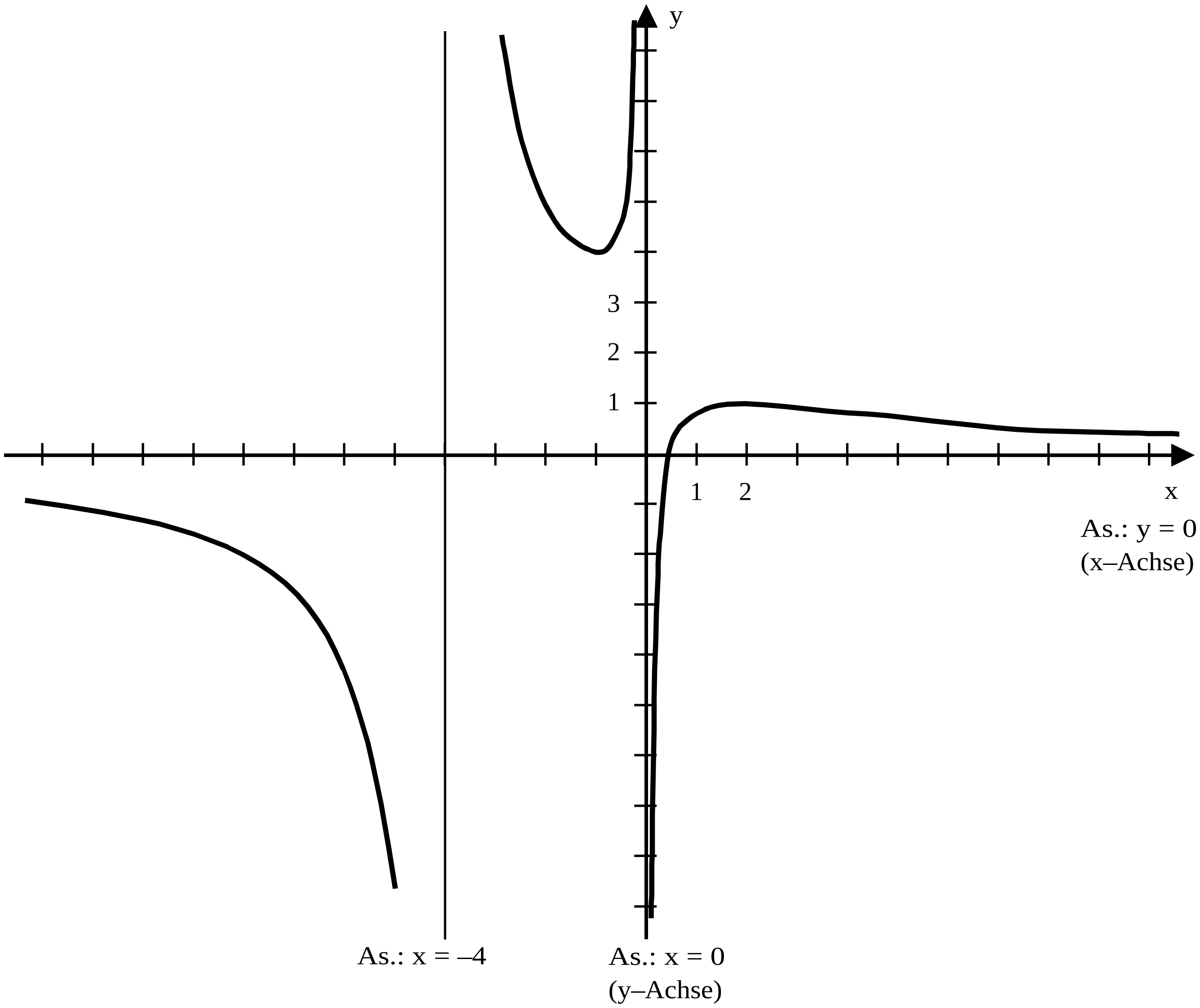
- $$\lim_{\substack{x\to-4\\x<-4}}\frac{8x-4}{x\cdot(x+4)} = \frac{-36}{0,\ \{(-4)\cdot(0 \text{ vom Negativen her})\}} = \frac{-36}{0} = -\infty$$
- $$\lim_{\substack{x\to-4\\x>-4}}\frac{8x-4}{x\cdot(x+4)} = \frac{-36}{0,\ \{(-4)\cdot(0 \text{ vom Positiven her})\}} = \frac{-36}{-0} = \infty$$
- $$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{8x-4}{x\cdot(x+4)} = \frac{-36}{0,\ \{(0 \text{ vom Negativen her})\cdot 4\}} = \frac{-36}{-0} = \infty$$
- $$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{8x-4}{x\cdot(x+4)} = \frac{-36}{0,\ \{(0 \text{ vom Positiven her})\cdot 4\}} = \frac{-36}{0} = -\infty$$

v) die Gleichungen der Asymptoten

Zuerst bei den Definitionslücken die senkrechten Asymptoten: $\underline{\underline{x = 0}}$ und $\underline{\underline{x = -4}}$

Der Grenzwert für $x \to \pm\infty$ ist 0. Dieser bestimmt die waagerechte Asymptote $\underline{\underline{y = 0}}$.

vi) Skizzieren Sie den Graphen in einem sinnvollen Bereich. Achten Sie auf korrekte Krümmung und zeichnen Sie die Asymptoten ein.



b) ***(4.5 Punkte)*** **Berechnen Sie die Fläche, die eingeschlossen wird von der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x = –2 und der Parabel $y = x^2 + 1$.**

Zuerst berechnen wir die Tangente mit der Geradengleichung $y = m\cdot x + q$ an f(x) bei x = –2:

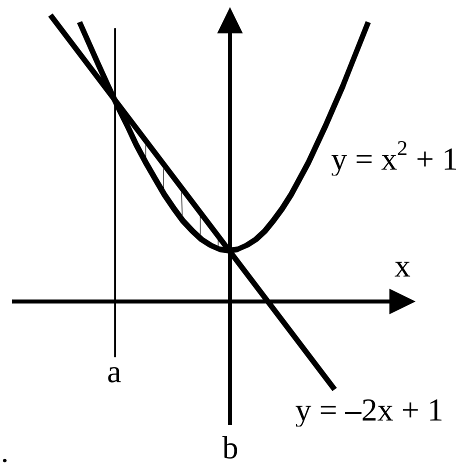
Die Steigungen der Tangente und des Graphen bei x = –2 sind gleich:

$$m = f'(-2) = \left.\frac{8\cdot(x^2+4x) - [(8x-4)\cdot(2x+4)]}{(x^2+4x)^2}\right|_{x=-2}$$

$$= \frac{8\cdot((-2)^2+4(-2)) - [(8(-2)-4)\cdot(2(-2)+4)]}{((-2)^2+4(-2))^2} = -2$$

Die Tangente hat also die Gleichung y = –2x + q, wobei q bestimmt wird, indem man die Koordinaten des Berührungspunkts (des gemeinsamen Punkts von Tangente und Graph) (–2|5) in den Ansatz einsetzt. (Der Punkt (–2|5) muss die Tangentengleichung erfüllen.)

$$y = -2x + q \qquad | \ x = -2 ; \quad y = 5$$
$$5 = -2\cdot(-2) + q$$
$$q = 1$$
$$\Rightarrow \quad \underline{\text{Tangentengleichung } y = -2x + 1}$$



Nun machen wir eine Skizze der gesuchten Fläche:
Wir müssen noch die Schnittpunkte der beiden Graphen berechnen:

$$x^2 + 1 = -2x + 1 \qquad |+2x - 1$$
$$x^2 + 2x = 0$$
$$\Rightarrow \quad x\cdot(x + 2) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 0 \text{ oder } x = -2$$

Also entspricht im Bild a = –2 und b = 0

Die schraffierte Fläche berechnen wir mit einem Integral:

$$A = \int_{-2}^{0}(-2x+1)\,dx - \int_{-2}^{0}(x^2+1)\,dx = \int_{-2}^{0}(-2x+1)-(x^2+1)\,dx = \int_{-2}^{0}-x^2-2x\,dx =$$

$$\left[-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^{0} = \left[-\frac{0}{3}-0\right]-\left[-\frac{-8}{3}-4\right] = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

4) Ein Flugzeug befindet sich um 12.20 Uhr bei den Koordinaten F(5|11|2) (eine Einheit entspricht einem Kilometer). Das Flugzeug beschreibt eine völlig geradlinige Flugbahn und legt pro Minute den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 0.1 \end{pmatrix}$ zurück.

a) ***(1.5 Punkte)*** **Wie schnell fliegt das Flugzeug in km/h ?**

pro Minute wird einmal der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 0.1 \end{pmatrix}$ zurückgelegt. Seine Länge beträgt

$\sqrt{12^2 + (-7)^2 + 0.1^2} = \underline{13.8928 \text{ km}}$

Dies legt es pro Minute zurück. Pro Stunde kommt es 60 Minuten weit

$\Rightarrow v = 60 \cdot (13.8928 \text{ km/min}) = \underline{\underline{833.57 \text{ km/h}}}$

b) ***(1.5 Punkte)*** **Wenn das Flugzeug geradeaus weiterfliegt, trifft es auf eine steile Felswand, die als Ebene mit der Gleichung E: –9x + 5y +1500 = 0 beschrieben werden kann. In welchem Winkel würde das Flugzeug auf die Wand prallen ?**

$$\sin(\alpha) = \left| \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}_E}{\left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{n}_E\right|} \right| = \left| \frac{\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 0.1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{12^2 + (-7)^2 + 0.1^2} \cdot \sqrt{(-9)^2 + 5^2 + 0^2}} \right| = 0.99975$$

$\Rightarrow \alpha = \arcsin(0.99975) = \underline{\underline{88.73°}}$

c) ***(4.5 Punkte)*** **Um exakt 12.22 Uhr und 48 Sekunden beginnt ein Gewitter mit Zentrum bei den Koordinaten G(45|–10|2.5).**

i) Wie weit entfernt vom Gewitterzentrum befindet sich das Flugzeug um 12.22 Uhr und 48 Sekunden?

2 Minuten und 48 Sekunden entsprechen 2.8 Minuten. Das Flugzeug befindet sich dann beim Punkt F' $\vec{f'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} + 2.8 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38.6 \\ -8.6 \\ 2.28 \end{pmatrix} \Rightarrow$ F'(38.6|–8.6|2.28)

Der Abstand zum Gewitter G ist dann gleich der Länge des Vektors $\overrightarrow{F'G}$

$\left|\overrightarrow{F'G}\right| = \left| \begin{pmatrix} 6.4 \\ -1.4 \\ 0.22 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6.4^2 + (-1.4)^2 + 0.22^2} = \underline{\underline{6.555 \text{ km}}}$

ii) Berechnen Sie die kürzeste Distanz des Flugzeugs zum Gewitterzentrum, wenn es auf der geraden Flugbahn weiterfliegt.

Man muss die Distanz vom Punkt G zur Geraden der Flugbahn g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 0.1 \end{pmatrix}$

berechnen:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{FG} \times \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 40 \\ -21 \\ 0.5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 0.1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 0.1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1.4 \\ 2 \\ -28 \end{pmatrix}\right|}{13.8928} = \underline{\underline{2.023 \text{ km}}}$$

d) ***(2.5 Punkte)*** **Ein zweites Flugzeug fliegt ebenfalls auf einer geradlinigen Flugbahn entlang der Geraden h:** $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0.4 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie, dass sich die Flugbahnen der beiden Flugzeuge nicht schneiden.

Einen allfälligen gemeinsamen Schnittpunkt findet man durch Gleichsetzen der Geradengleichungen. Man muss nun beweisen, dass es keine Werte für die Parameter s und t der Geradengleichungen gibt, so dass gilt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

Durch die ersten zwei Komponentengleichungen kann man s und t bestimmen:

$$\left| \begin{array}{lcl} 0 + 4s & = & 5 + 12t \\ 0 - s & = & 11 - 7t \end{array} \right| \Rightarrow s = -11 + 7t$$

Einsetzen in die erste Gleichung:

$$4(-11 + 7t) = 5 + 12t$$

$$\Rightarrow \quad t = \underline{\tfrac{49}{16}}$$

Nun noch s bestimmen: $s = -11 + 7\cdot(\tfrac{49}{16}) = \underline{\tfrac{167}{16}}$

Bis jetzt haben wir die dritte Komponentengleichung nicht benützt. Diese muss auch erfüllt sein, sonst sind die Geraden windschief und es gibt keinen gemeinsamen Punkt.

Setze $t = \tfrac{49}{16}$ und $s = \tfrac{167}{16}$ in die z–Gleichung ein:

$$0+0.4\cdot(\tfrac{167}{16}) = 2 + 0.1\cdot\tfrac{49}{16}$$

$$4.175 = 2.30625$$

Und dies ist falsch ⇒ Die Geraden haben keinen gemeinsamen Punkt.

5) Ein Biologe setzt zu wissenschaftlichen Zwecken in einem abgeschlossenen Gebiet Kaninchen und Füchse aus und misst während 12 Jahren den Bestand der Tiere. Nach Abschluss des Experiments hat ein Mathematiker für die Anzahl Kaninchen zum Zeitpunkt x die Näherungsfunktion

$$K(x) = 4x^3 - 60x^2 + 196x + 1000$$

gefunden ($0 \le x \le 12$ bezeichnet die Anzahl Jahre nach Beginn des Experiments).
Geben Sie die Lösungen der folgenden Aufgaben jeweils auf Tage genau an (1 Jahr = 365 Tage) und notieren Sie den Lösungsweg, wobei Sie die Gleichungen mit dem Taschenrechner lösen dürfen.

a) ***(2 Punkte)*** **Wann hat es die wenigsten, wann die meisten Kaninchen in den 12 Jahren ?**

Die Extremwerte im Bereich $0 \le x \le 12$ sind an Stellen x mit der Ableitung $K'(x) = 0$ oder am Rand des Bereichs $0 \le x \le 12$:

$K'(x) = 12x^2 - 120x + 196 = 0$, für $x = 7.944$ oder $x = 2.056$

Nun berechnen wir die Funktionswerte bei diesen Stellen und bei den Rändern $x = 0$ und $x = 12$ des Definitionsbereichs:

$K(0) = 1000$; $K(2.056) = 1184$; $K(7.944) = 776$; $K(12) = 1624$

Ein Vergleich der Funktionswerte zeigt:

<u>Am meisten Kaninchen hat es nach 12 Jahren = 4380 Tage (nämlich 1624 Stück)</u>

<u>Am wenigsten Kaninchen hat es nach 7.944 Jahren = 7.944·365 = 2899.5 Tage (nämlich 776 Stück).</u>

b) ***(2.5 Punkte)*** **Zu welchem Zeitpunkt nimmt der Kaninchenbestand am stärksten ab ? Wie gross ist diese Abnahme ? (Beschreiben Sie in einem kurzen Satz, welche Masseinheit die Lösungszahl hat und was diese bedeutet!)**

Die Abnahme– bzw. Zunahmerate wird durch die erste Ableitung bestimmt. Die stärkste Abnahme ist also dort, wo die erste Ableitung $K'(x)$ ein Minimum hat. Diese Stelle berechnet man, indem man $K'(x)$ ableitet und Null setzt. Die Ableitung von $K'(x)$ ist aber die zweite Ableitung $K''(x)$. Wenn wiederum diese Null ist, so haben wir einen Wendepunkt. ⇒ Die stärkste Abnahme der Kaninchenanzahl $K(x)$ ist also beim Wendepunkt.

$K''(x) = 24x - 120 = 0$, für $x = 5$

⇒ <u>Die stärkste Abnahme haben wir nach 5 Jahren = 1825 Tage</u>

Die Abnahme beträgt dann $K'(5) = 12 \cdot 5^2 - 120 \cdot 5 + 196 =$ <u>–104 Kaninchen pro Jahr</u>

<u>Bedeutung: In diesem Moment der stärksten Abnahme sterben auf ein Jahr hochgerechnet 104 Kaninchen (also z.B. $\frac{104}{365}$ pro Tag)</u>

c) *(2.5 Punkte)* **Wie gross ist der Kaninchenbestand über die 12 Jahre im Durchschnitt ?** ***(Den Durchschnitt der Funktionswerte erhält man, indem man die Fläche unter dem Graphen durch die Länge des entsprechenden Intervalls auf der x-Achse dividiert.)***

Durchschnittliche Anzahl Kaninchen = $\frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} K(x)\,dx = \frac{1}{12} \cdot \left[x^4 - 20x^3 + 98x^2 + 1000x\right]_0^{12} =$

$\frac{1}{12} \cdot \left[\left(12^4 - 20 \cdot 12^3 + 98 \cdot 12^2 + 1000 \cdot 12\right) - (0)\right] = \underline{\underline{1024}}$

d) *(3 Punkte)* **Finden Sie eine entsprechende Näherungsfunktion**

$$\mathbf{F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$$

für den Fuchsbestand, wenn die Messungen folgendes ergaben:

- **Zu Beginn (Jahr 0) wurden 200 Füchse ausgesetzt.**
- **Nach 10 Jahren sind die Füchse ausgestorben.**
- **Die meisten Füchse gab es nach 5 Jahren, nämlich 300 Tiere.**

Zu Beginn 200 Füchse ⇒	$F(0) = 200$
Keine Füchse mehr nach 10 Jahren ⇒	$F(10) = 0$
Am meisten Füchse nach 5 Jahren, ⇒	$F'(5) = 0$
nämlich 300 ⇒	$F(5) = 300$

Diese Gleichungen setzt man in den Ansatz $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ein:

$$\left|\begin{array}{rrrrcr} & & & d & = & 200 \\ 10^3 \cdot a & +10^2 \cdot b & +10c & +d & = & 0 \\ 5^3 \cdot a & +5^2 \cdot b & +5c & +d & = & 300 \\ 3 \cdot 5^2 \cdot a & +2 \cdot 5 \cdot b & +c & & = & 0 \end{array}\right|$$

Der Taschenrechner gibt die Lösungen $a = -0.8$; $b = 4$; $c = 20$; $d = 200$ aus

⇒ $\underline{\underline{F(x) = -0.8x^3 + 4x^2 + 20x + 200}}$

6) Nun noch zwei unabhängige Kurzaufgaben zu verschiedenen Themen:

a) ***(4.5 Punkte)*** **Bei einem Glücksspiel werden mit einem Griff 4 Kugeln aus einer Kiste mit 10 roten und 50 weissen Kugeln gezogen. Für jede weisse Kugel muss der Spieler 2 Franken bezahlen, für jede rote Kugel bekommt er vom Veranstalter 5 Franken. Es sei X der Gewinn bzw. Verlust beim einmaligen Spielen. Berechnen Sie E(X), VAR(X) und σ !**

Die Tabelle der Verteilung der Zufallsvariablen X

Ziehung	4 rote	3 rote, 1 weisse	2 rote, 2 weisse	1 rote, 3 weisse	4 weisse
Gewinn X	$4\cdot5$ $= 20$	$3\cdot5 + 1\cdot(-2)$ $= 13$	$2\cdot5 + 2\cdot(-2)$ $= 6$	$1\cdot5 + 3\cdot(-2)$ $= -1$	$4\cdot(-2)$ $= -8$
Wahrscheinlich–keit P(X)	$\frac{\binom{10}{4}}{\binom{60}{4}} =$ 0.00043	$\frac{\binom{10}{3}\cdot\binom{50}{1}}{\binom{60}{4}} =$ 0.0123	$\frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{50}{2}}{\binom{60}{4}} =$ 0.11305	$\frac{\binom{10}{1}\cdot\binom{50}{3}}{\binom{60}{4}} =$ 0.4019	$\frac{\binom{50}{4}}{\binom{60}{4}} =$ 0.47228

Die Wahrscheinlichkeiten erhält man aus der totalen Anzahl Möglichkeiten, aus 60 Kugeln 4 Stück zu ziehen $\binom{60}{4}$ und der jeweils günstigen Anzahl Möglichkeiten $\binom{10}{x}\cdot\binom{50}{y}$ x von 10 roten und y von 50 weissen Kugeln zu ziehen.

$\Rightarrow E(X) = 0.00043\cdot20 + 0.0123\cdot13 + 0.11305\cdot6 + 0.4019\cdot(-1) + 0.47228\cdot(-8) = \underline{\underline{-3\tfrac{1}{3}\text{ Fr.}}}$

$VAR(X) = 0.00043\cdot20^2 + 0.0123\cdot13^2 + 0.11305\cdot6^2 + 0.4019\cdot(-1)^2 + 0.47228\cdot(-8)^2 - \left(3\tfrac{1}{3}\right)^2$

$= 25.838$

$\Rightarrow \sigma = \underline{\underline{5.08\text{Fr.}}}$

b) ***(5.5 Punkte)*** **Ein Architekt soll ein einstöckiges, quaderförmiges Gebäude möglichst kostengünstig bauen. Dabei hat er folgende Bedingungen zu erfüllen:**

- **Das Volumen soll 1000 m^3 betragen.**
- **Die nach Süden und Norden gerichteten Seiten sollen doppelt so lang sein wie die nach Osten bzw. Westen gerichtete Seiten.**
- **Die Südfassade kostet 5000 Fr. pro m^2, die anderen drei Fassaden kosten 1200 Fr. pro m^2. (Die Südfassade soll ganz aus Glas sein und ist teurer als eine normale Mauer.)**
- **Das Flachdach kostet 1500 Fr. pro m^2**

Berechnen Sie die Abmessungen (Länge, Breite, Höhe) des optimalen Bauwerks auf zwei Stellen nach dem Komma, wobei alle anderen Kosten (Aushub, Boden usw.) zu vernachlässigen sind.

Wir bezeichnen die Höhe des Gebäudes mit h, die Länge der Nord–/Südseite mit l und die Breite der Ost–/Westseite mit b. (Alle Variablen in Meter)
Die Dachfläche hat dann den Inhalt $l \cdot b$ und kostet total $l \cdot b \cdot 1500$
Die Südfassade hat dann den Inhalt $l \cdot h$ und kostet total $l \cdot h \cdot 5000$
Die Nordfassade hat dann den Inhalt $l \cdot h$ und kostet total $l \cdot h \cdot 1200$
Die Ost– und Westfassaden haben dann den Inhalt $b \cdot h$ und kosten jeweils $b \cdot h \cdot 1200$
Zählt man alles zusammen, so erhält man die Gesamtkosten (Zielfunktion K)
$\underline{K(l,b,h) = l \cdot b \cdot 1500 + l \cdot h \cdot 5000 + l \cdot h \cdot 1200 + 2 \cdot b \cdot h \cdot 1200}$ (ZF)

Man hat noch 2 Nebenbedingungen: einerseits ist die Länge l doppelt so gross wie die Breite b: $\underline{l = 2 \cdot b}$
Andererseits muss das Volumen 1000 m^3 betragen:

$$V = l \cdot b \cdot h = 1000 \;\Rightarrow\; h = \frac{1000}{l \cdot b} \overset{l=2b}{=} \frac{1000}{2b^2} = \frac{500}{b^2} \;\Rightarrow\; \underline{h = \frac{500}{b^2}}$$

Nun ersetzen wir in der Zielfunktion K(l,b,h) l und h durch die in der Nebenbedingung gefundenen Ausdrücke:

$$K(b) = (2b) \cdot b \cdot 1500 + (2b) \cdot \frac{500}{b^2} \cdot 5000 + (2b) \cdot \frac{500}{b^2} \cdot 1200 + 2 \cdot b \frac{500}{b^2} \cdot 1200$$

Zusammengefasst ergibt dies

$$K(b) = 3000b^2 + 7'400'000 \cdot \tfrac{1}{b} = 3000b^2 + 7'400'000 \cdot b^{-1}$$

Das Maximum findet man mit dem Taschenrechner oder über das Nullsetzen der ersten Ableitung: $K'(b) = 6000b + 7'400'000 \cdot (-1) \cdot b^{-2} = 6000b + 7'400'000 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{b^2} = 0$, wenn $\underline{\underline{b = 10.72 \text{ m}}}$

l und h bestimmt man durch Einsetzen in die entsprechenden Ausdrücke aus den Nebenbedingungen:
$l = 2 \cdot b = \underline{\underline{21.45 \text{ m}}}$

$$h = \frac{500}{b^2} = \underline{\underline{4.3476 \text{ m}}}$$