Lösungen: (**Die Aufgaben sind fett**, die Lösungen normal geschrieben.)

1) Analysis, 13 Punkte

Gegeben ist die Funktion $\mathbf{f(x) = \dfrac{2x^2 + 9x - 18}{x^2}}$ **.**

a) ***(5 Punkte)*** **Diskutieren Sie die Funktion f. Berechnen Sie dazu:**

i) den Definitionsbereich

Nullstelle des Nenners bei $x^2 = 0$, also $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

ii) die Nullstellen

Dazu muss der Zähler $2x^2 + 9x - 18 = 0$ sein, also $x_{1,2} = \dfrac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-18)}}{4} = \left\langle \begin{array}{l} -6 \\ 1.5 \end{array} \right.$

iii) die erste Ableitung ohne Taschenrechner und mit deren Hilfe die Extrema

$$f'(x) = \frac{x^2(4x+9) - \left[2x \cdot (2x^2 + 9x - 18)\right]}{x^4} = \ldots = \frac{-9x^2 + 36x}{x^4} = \frac{-9x + 36}{x^3}$$

Bei den Extrema ist die erste Ableitung Null, also $-9x + 36 = 0$

Dies gilt bei $x = 4$, der zugehörige y–Wert ist $f(4) = 3.125 \Rightarrow E(4|3.125)$

iv) die Grenzwerte bei den Definitionslücken und bei $\mathbf{x \to \pm\infty}$

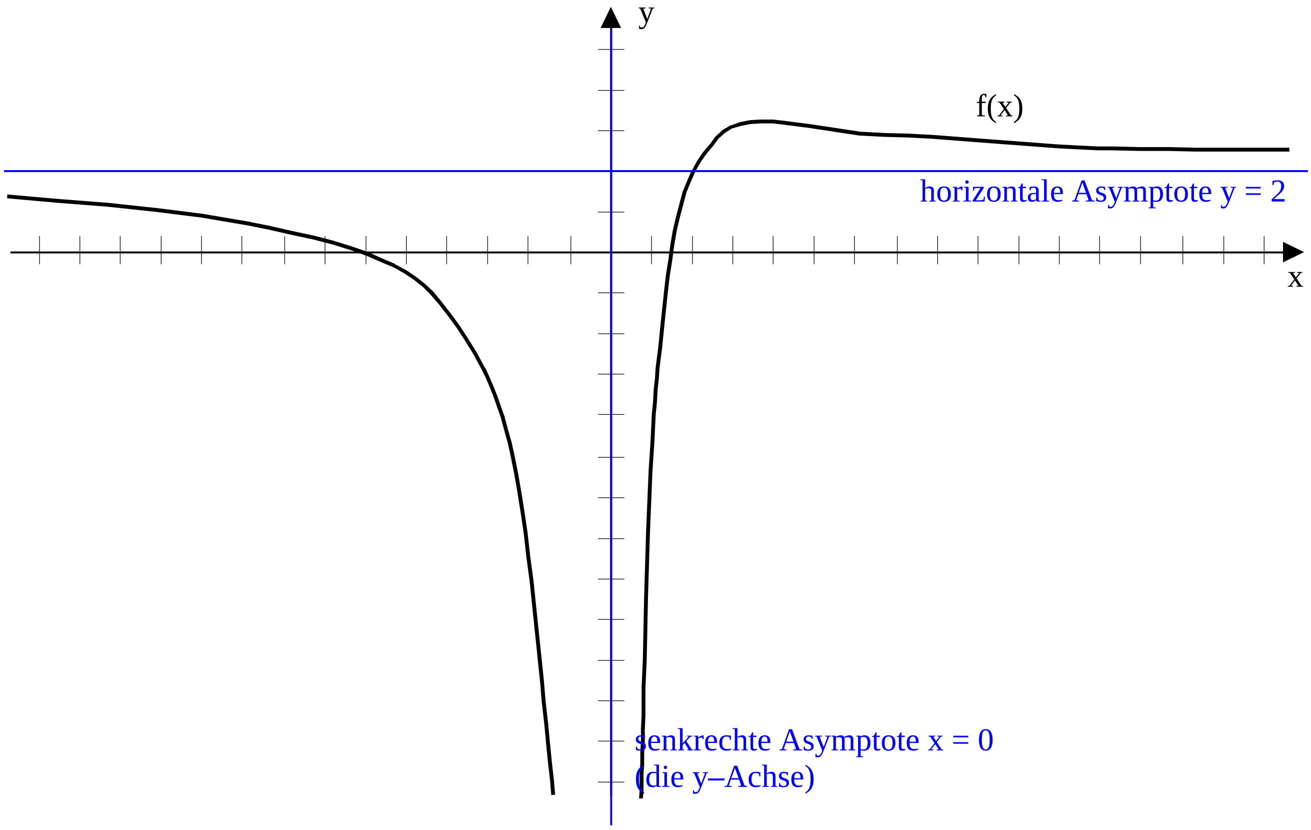
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \frac{\text{ungefähr } -18}{\text{fast } 0, \text{ aber sicher positiv}} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \frac{\text{ungefähr } -18}{\text{fast } 0, \text{ aber sicher positiv}} = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \to \infty} 2 = 2 = \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

v) die Gleichungen der Asymptoten
x = 0 (bei der Definitionslücke)
und y = 2 (horizontale Asymptote, siehe Aufgabe iv)

vi) Skizzieren Sie den Graphen in einem sinnvollen Bereich. Achten Sie auf korrekte Krümmung, und zeichnen Sie die Asymptoten ein.



b) ***(3 Punkte)*** **Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente vom Punkt (0|0) aus an den Graphen von f(x) im 1. Quadranten (auf drei Stellen nach dem Komma runden).**

Da die Tangente durch (0|0) geht, muss in der Geradengleichung y = mx + q der Achsenabschnitt q = 0 sein.
Im unbekannten Berührungspunkt (x|y = f(x)) der Tangente an den Graphen sind die Steigungen der Tangente (gleich m) und des Graphen (1. Ableitung) gleich: m = f′(x), ausserdem gehen Tangente und Graph beide durch den Berührungspunkt (x|y = f(x))
Dies führt zum Gleichungssystem

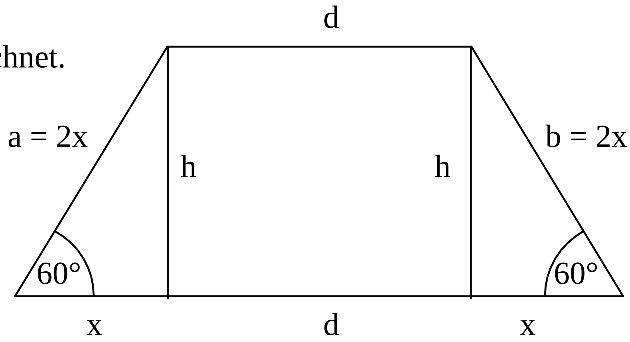
$$\left| \begin{array}{l} m = f'(x) \\ mx = f(x) \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} m = \dfrac{-9x+36}{x^3} \\ mx = \dfrac{2x^2+9x-18}{x^2} \end{array} \right| \overset{TR}{\Rightarrow} \begin{array}{l} x = 2.374 \text{ und } m = 1.094 \\ \text{oder } x = -11.374 \text{ und } m = -0.094 \end{array}$$

Da nur die erste Lösung im 1. Quadranten liegt, ist also die Tangentengleichung y = 1.094x

c) *(5 Punkte)* **Extremalwertaufgabe**
Ein Luftschacht soll im Querschnitt (Bild rechts) die Form eines gleichschenkligen Trapezes mit Basiswinkeln von 60° haben und eine Querschnittsfläche von 15 m^2 besitzen. Wie muss man die Abmessungen des Querschnitts wählen, damit dieser einen möglichst kleinen Umfang hat?

Wähle Variablen wie rechts im Bild eingezeichnet.

Durch Einzeichnen der Höhe entstehen links und rechts Dreiecke mit einem rechten und einem 60° Winkel, also zwei halbe gleichseitige Dreiecke. Deswegen sind die Seiten a und b des Trapezes doppelt so lang wie das Stück x.



Zielfunktion: Der Umfang $U = x + d + x + 2x + d + 2x = 2d + 6x$ soll minimal werden.

Bedingungen: Die Fläche $A = m \cdot h = \left(\frac{(x+d+x)+d}{2}\right) \cdot h = (x+d) \cdot h = 15$

Pythagoras im Dreieck mit den Seiten x, h und 2x: $x^2 + h^2 = (2x)^2$

Die Zielfunktion soll nur noch von x abhängen, eliminiere deshalb h und d mit Hilfe der Bedingungen:

Löse den Pythagoras nach h auf: $h^2 = 4x^2 - x^2 \;\Rightarrow\; h^2 = 3x^2 \;\Rightarrow\; h = \sqrt{3} \cdot x$

Setze dies in die Gleichung für die Fläche ein: $(x+d) \cdot h = 15 \xrightarrow{h=\sqrt{3}\cdot x} (x+d) \cdot \sqrt{3} \cdot x = 15$
und löse diese Gleichung nach d auf: $(x+d) = \frac{15}{\sqrt{3}\cdot x} \;\Rightarrow\; d = \frac{15}{\sqrt{3}\cdot x} - x$

Nun setzt man diesen Term für d in die Zielfunktion ein:

$$U = 2d + 6x \xrightarrow{d=\frac{15}{\sqrt{3}\cdot x}-x} U = 2 \cdot \left(\frac{15}{\sqrt{3}\cdot x} - x\right) + 6x = \frac{30}{\sqrt{3}\cdot x} + 4x$$

und minimiert diesen mit Hilfe der ersten Ableitung

$$U'(x) = \frac{-30\sqrt{3}}{3x^2} + 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2.0809 \text{ m}$$

Mit Hilfe der im Lösungsweg gefundenen Gleichungen bestimmt man die restlichen Variablen:

$d = \frac{15}{\sqrt{3}\cdot x} - x = 2.0809$ m
$h = \sqrt{3} \cdot x = 3.604$ m
Grundlinie $g = d + 2x = 6.243$ m
Seiten $s = 2x = 4.162$ m

2) Vektorgeometrie, 10 Punkte
Gegeben ist die Ebene E durch die Punkte A(–1|4|2), B(1|0|2) und C(1|–4|4), sowie die Gerade g durch die Punkte G(2|6|7) und H(–4|9|–2).

a) ***(1.5 Punkte)*** **Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E.**

$\overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$, welcher kollinear zu $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist.

$\Rightarrow$ Ansatz E: $2x + y + 2z + D = 0$, durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes auf E (z.B. A) bestimmt man D: $2\cdot(-1) + 4 + 2\cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D = -6$

E: $2x + y + 2z - 6 = 0$

b) ***(1.5 Punkte)*** **Berechnen Sie den Winkel zwischen der Ebene E und der xz–Ebene.**

Die y–Achse steht senkrecht auf der xz–Ebene. Die xz–Ebene hat den Normalenvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

α = Winkel zwischen den Ebenen $\Rightarrow$ $\cos(\alpha) = \dfrac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot 1} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \alpha = \arccos(\frac{1}{3}) = 70.529°$

c) ***(2 Punkte)*** **Finden Sie die Gleichung einer Geraden h, welche die Geraden g in einem beliebigen Punkt rechtwinklig schneidet (nur eine Lösung angeben).**
Es gibt unendlich viele (verschiedene) Lösungen, welche 2 Bedingungen erfüllen müssen.

1. Die gesuchte Gerade h muss mit g einen gemeinsamen Punkt haben, z.B. den Aufpunkt (2|6|7) von g.
2. Der Richtungsvektor von h muss senkrecht auf demjenigen von g stehen.
   Das Skalarprodukt des gesuchten Richtungsvektors muss also mit dem Richtungsvektor von g: $\overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ Null betragen, dies erfüllt z.B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, da $6\cdot 0 + (-3)\cdot 3 + 9\cdot 1 = 0$

$\Rightarrow$ h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) *(2.5 Punkte)* **Welche Punkte auf der y–Achse haben von der xz–Ebene und der Ebene E den gleichen Abstand?**

Ein beliebiger Punkt P auf der y–Achse hat die Koordinaten P(0|y|0).

Der Abstand zur xz–Ebene wird entlang der y–Achse gemessen, da diese senkrecht auf der xz–Ebene steht, daher ist der Abstand von P zur xz–Ebene seine y–Koordinate y.

Der Abstand von P zur Ebene E misst man mit der Abstandsformel mit Hilfe der HNF:

Diese beiden Abstände müssen *vom Betrag her* gleich sein, deswegen ± bei der HNF

$\Rightarrow \pm\dfrac{2\cdot(0)+(y)+2\cdot(0)-6}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = y \Rightarrow \pm\dfrac{y-6}{3} = y \Rightarrow \pm(y-6) = 3y \Rightarrow$ (Fallunterscheidung)

$\begin{cases} +(y-6) = 3y \Rightarrow y = -3 \\ -(y-6) = 3y \Rightarrow y = 1.5 \end{cases}$, also sind die Lösungen P(0|–3|0) und P(0|1.5|0).

e) *(2.5 Punkte)* **Finden Sie eine Gleichung der Schnittgeraden der Ebenen E und F. Die Ebene F steht senkrecht auf E und enthält die Gerade g. Welche spezielle Lage hat diese Schnittgerade?**

Zuerst bestimmt man eine Gleichung von F: Da die Ebenen E und F senkrecht aufeinander stehen, gilt dies auch für ihre Normalenvektoren $\overrightarrow{n_E}$ und $\overrightarrow{n_F}$

$\overrightarrow{n_F}$ steht zudem senkrecht auf dem Vektor $\overrightarrow{HG}$, da dieser in F liegt

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{n_F}$ steht auf zwei bekannten Vektoren senkrecht $\Rightarrow \overrightarrow{n_F} = \overrightarrow{n_E} \times \overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \\ -12 \end{pmatrix}$,

welcher kollinear zu $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist.

$\Rightarrow$ Ansatz F: 5x – 2y – 4z + D = 0 , durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes auf F (z.B. G) bestimmt man D: 5·(2) – 2·(6) – 4·7 + D = 0 $\Rightarrow$ D = 30

F: 5x – 2y – 4z + 30 = 0

Für die Schnittgerade s braucht man zwei Punkte, welche zugleich auf E und F liegen:
Die Koordinaten dieser Punkte müssen also beide Ebenengleichungen erfüllen:

$\left| \begin{array}{r} 2x+y+2z-6=0 \\ 5x-2y-4z+30=0 \end{array} \right|$ zwei Gleichungen (Bedingungen), aber drei Variablen.

Man kann also in diesem Gleichungssystem eine Variable wählen

z.B. x = 0 führt zu keiner Lösung ($\Rightarrow$ die Schnittgerade s liegt parallel zur x–Achse)

z.B. y = 0 führt zu x = –2 und z = 5 $\Rightarrow$ (–2|0|5) $\in$ s

z.B. z = 0 führt zu x = –2 und y =10 $\Rightarrow$ (–2|10|0) $\in$ s

$\Rightarrow$ s: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$

3) Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik, 9.5 Punkte
(Runden Sie die Resultate auf drei Stellen nach dem Komma!)

a) ***(3.5 Punkte)*** **In einer Rundfunksendung sind 30% aller gespielten Titel Oldies. Die Reihenfolge, in der die Titel abgespielt werden, wird nach dem Zufallsprinzip von einem Computer festgelegt.**

i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 15 gespielten Titeln mindestens 3 Oldies vorkommen?

Bernoulli–Experiment mit p = 0.3 , n = 15 Wiederholungen, mindesten 3 "Erfolge" (= Oldies) also $k \geq 3 \Rightarrow$ P(mindestens 3 Oldies) = $\sum_{k=3}^{15} B(15, 0.3; k) = 0.8732$

ii) Ein Hörer freut sich auf die Oldies. Wie viele Lieder muss er mindestens anhören, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50% mindestens 6 Oldies hören kann?

Hier sind die Anzahl Wiederholungen n gesucht, sodass mindestens 6 Oldies mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 50% = 0.5 gespielt werden: $\sum_{k=6}^{n} B(n, 0.3; k) > 0.5$

Dies überfordert den Taschenrechner, weswegen man das Gegenereignis betrachten muss: Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 5 Oldies gespielt werden, soll kleiner als 50% sein: $\sum_{k=0}^{5} B(n, 0.3; k) < 0.5$. Diese Gleichung löst der Taschenrechner: n = 18.56

$\Rightarrow$ Der Hörer muss mindestens 19 Lieder hören.

b) ***(3 Punkte)*** **Ein Moderator lässt die Hörer über Internet das Programm der nächsten Stunde bestimmen. Dabei können die Zuhörer Titel aus einer Liste mit 50 Liedern aus den 80-iger Jahren und 30 Liedern aus den 60-iger Jahren zufällig wählen.**

i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von total 25 ausgewählten Liedern genau 15 Titel aus den 80-iger und 10 aus den 60-iger Jahren vorkommen?

Insgesamt möglich ist eine Wahl von 25 aus total 80 Liedern, wobei nicht wiederholt wird (kein Lied zweimal) und die Reihenfolge keine Rolle spielt: $\binom{80}{25}$ Möglichkeiten.

Günstig sind 15 Titel der 50 aus den 80–igern und 10 Titel der 30 aus den 60–igern, also $\binom{50}{15} \cdot \binom{30}{10}$ Möglichkeiten. $\Rightarrow$ p = $\dfrac{\binom{50}{15} \cdot \binom{30}{10}}{\binom{80}{25}} = 0.1861$

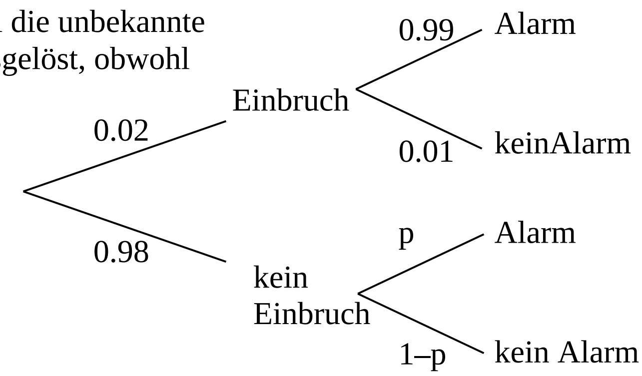
ii) Wie viele verschiedene Reihenfolgen gibt es, in welcher der Moderator diese 25 Titel abspielen kann?

Reihenfolge wichtig, ohne Wiederholung $\Rightarrow 25! = 1.551 \cdot 10^{25}$

c) ***(3 Punkte)*** **Das Risiko, dass ein Auto auf dem Parkplatz des Radiosenders aufgebrochen wird, beträgt nach Installation einer Überwachungskamera nur noch 2%. Trotzdem lässt der vorsichtige Discjockey eine Warnanlage in seinen Wagen einbauen, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% einen Alarm auslöst, wenn der Wagen aufgebrochen wird. Die Warnanlage ist allerdings so sensibel eingestellt, dass sie auch durch eine unvorsichtige Berührung aktiviert wird, d.h. es wird ein Alarm ausgelöst, ohne dass ein Einbruch stattfindet. Das passiert mit einer unbekannten Wahrscheinlichkeit p.**
Anwohner beobachteten mit einigem Missfallen, dass die Alarmanlage in 25% der Nächte, in denen der Wagen auf dem Parkplatz abgestellt wurde, anschlug.

i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit p, dass ein Alarm ausgelöst wird, obwohl der Wagen nicht aufgebrochen wird?

Zuerst zeichnet man einen Baum, wobei die unbekannte Wahrscheinlichkeit für "Alarm wird ausgelöst, obwohl kein Einbruch" mit p bezeichnet wird.
Nun kann man eine Gleichung für p aufstellen, wobei man berechnet, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass Alarm ausgelöst wird:
P(Alarm) = $0.02 \cdot 0.99 + 0.98 \cdot p = 25\%$
$\Rightarrow p = 23.4898\%$



ii) Der Discjockey hört seine Alarmanlage aufheulen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich ein Einbruch stattfindet?
Hinweis: Sie können diese Aufgabe auch ohne das Resultat aus i) lösen.

Bedingte Wahrscheinlichkeit: P(Einbruch|Alarm) (man weiss, dass Alarm ausgelöst wurde, wie gross ist also die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich eingebrochen wird?

$$P(\text{Einbruch}|\text{Alarm}) = \frac{P(\text{es wird eingebrochen und es wird Alarm ausgelöst})}{P(\text{Alarm wird ausgelöst})}$$

$$P(\text{Einbruch}|\text{Alarm}) = \frac{0.02 \cdot 0.99}{0.25} = 7.92\% \quad (!!!)$$

4) Vektorgeometrie, 9.5 Punkte
Bei einem Wettrennen mit Modellfahrzeugen startet ein U–Boot im Punkt (312|–640|–100), ein Schiff im Punkt (–622|1243|0) und ein Heissluftballon im Punkt (–450|754|200). Da die drei Verkehrsmittel nicht durch ein gemeinsames Ziel schwimmen bzw. fahren können, hat derjenige gewonnen, welcher als erster die Ebene Z: x – 2y + 8 = 0 erreicht. Der Meeresspiegel ist die xy–Ebene, eine Einheit entspricht einem Meter.

a) *(2 Punkte)* **Das U–Boot muss wegen einer Untiefe etwas aufsteigen und erreicht das Ziel im Punkt (–8|0|–20). Wie viele Sekunden brauchte es für seine Strecke, wenn es geradlinig und mit 16.2 km/h unterwegs war?**

Zurückgelegte Distanz = Länge von (312|–640|–100) nach (–8|0|–20) = $\left\| \begin{pmatrix} -320 \\ 640 \\ 80 \end{pmatrix} \right\|$ = 720 m

16.2 km/h entsprechen 4.5 m/s $\Rightarrow$ Zeit $t = \frac{s}{v} = \frac{720}{4.5} = 160$ s

b) *(2.5 Punkte)* **Bestimmen Sie den Zielpunkt des Schiffs, wenn es auf dem schnellstmöglichen Weg (senkrecht zur Ebene Z) nach 155 Sekunden beim Ziel ankommt.**

Das Schiff bewegt sich also entlang der Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -622 \\ 1243 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei der Richtungsvektor senkrecht auf Z steht.

Schneidet man diese Gerade mit der Zielebene Z, so erhält man den Zielpunkt:
$(-622 + t) - 2\cdot(1243 - 2t) + 8 = 0 \Rightarrow t = 620 \Rightarrow$ Zielpunkt Schiff (–2|3|0)

c) **Der Ballon wird abgelenkt (Wind) und legt pro Sekunde den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ zurück.**

i) *(2 Punkte)* **In welchem Punkt kommt der Ballon bei der Zielebene an?**

Der Ballon bewegt sich also entlang der Geraden h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -450 \\ 754 \\ 200 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, wobei t genau die Anzahl Sekunden angibt, welche der Ballon unterwegs ist.

Schneidet man diese Gerade mit der Zielebene Z, so erhält man den Zielpunkt:
$(-450 + 3t) - 2\cdot(754 - 5t) + 8 = 0 \Rightarrow t = 150 \Rightarrow$ Zielpunkt Ballon (0|4|50)

ii) *(1 Punkt)* **Wie viele Sekunden brauchte der Ballon für seine Fahrt? (Und wer hat damit das Rennen gewonnen?)**
Bei i) bekam man für t = 150 s, das U–Boot benötigt 160 s, das Schiff 155 s
$\Rightarrow$ Der Ballon gewinnt.

iii) ***(2 Punkte)*** **Wie lange hätte der Ballon vom Start bis zur Zielebene gebraucht, wenn er mit der gleichen Geschwindigkeit, aber auf dem kürzest möglichen Weg gefahren wäre?**

Der kürzeste Weg liegt senkrecht zur Ebene Z, den Abstand des Ballons zu Z kann man mit der Abstandsformel der HNF berechnen: $\left| \dfrac{(-450) - 2 \cdot (754) + 8}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} \right| = 872.0665$ m

Die Geschwindigkeit bleibt gleich wie vorher, also pro Sekunde der Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit der Länge $\sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{35}$, das heisst die Geschwindigkeit beträgt v = $\sqrt{35}$ m/s

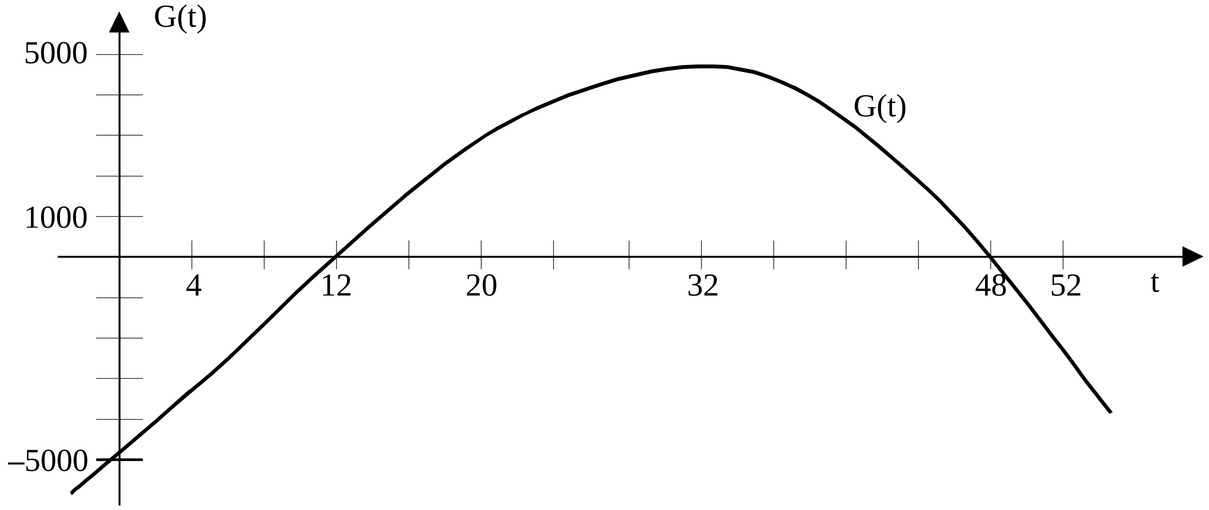
Die Zeit t, welche der Ballon für den direkten Weg dann braucht, ist $t = \dfrac{s}{v} = \dfrac{872.0665}{\sqrt{35}}$

t = 147.406 s

5) Analysis, 10 Punkte
Der Mathematiker einer Firma, welche Glacé (Eiskrem) verkauft, hat eine Funktion G(t) gefunden, welche angenähert jeder Woche t eines Jahres ($0 \leq t \leq 52$) den Gewinn G pro Woche (in Fr.) zuordnet:

$$G(t) = -\frac{25}{144}t^3 + \frac{25}{12}t^2 + 400t - 4800$$

a) ***(6 Punkte)*** **Beantworten Sie folgende Fragen mit einer ganz kurzen Begründung und mit Hilfe des Taschenrechners:**
Skizze des Graphen:



i) In welchen Wochen macht die Firma Verlust?
Die Nullstellen von G(t) sind bei t = 12 und t = 48 $\Rightarrow$ Verlust bis zur Woche 11 und ab der Woche 49

ii) Wann ist der Gewinn maximal bzw. minimal, und wie gross ist der Gewinn/Verlust dann?
Maximal bei t = 32, nämlich G(32) = 4444.44 Fr
Minimal bei t = 0 (bzw. t = 1), nämlich G(0) = –4800 Fr (bzw. G(1) = –4398 Fr
(der Wert bei der 52. Woche beträgt G(52) = –2777.78 Fr und ist nicht das Minimum)

iii) Berechnen Sie alle Wendepunkte des Graphen von G(t) für $0 \leq t \leq 52$ und erläutern Sie in einem kurzen Satz die Bedeutung des Wendepunkts für die Gewinnfunktion der Firma.
Wendepunkt bei t = 4, mit G(4) = –3177.78 Fr.
Bei diesem Zeitpunkt ist die Zunahme des Gewinns am grössten.

iv) Berechnen Sie den Gesamtgewinn bzw. –verlust der Firma über das ganze Jahr (= Wochen 0 bis 52).

Gesamtgewinn = Fläche unter dem Graphen = $\int_0^{52} f(x)\,dx$ = 71'500 Fr.

v) Wie viel Gewinn würde die Firma in der 45. Woche machen, wenn der Gewinn ab der 24. Woche konstant weiter wachsen würde (also mit der gleichen Zunahmerate wie in der 24. Woche)?

Zunahmerate des Gewinns = 1. Ableitung $G'(t)$

In der 24. Woche beträgt der Gewinn $G(24) = 3600$ Fr,
die Zunahmerate $G'(24) = 200$ Fr/Woche

In der 45. Woche (21 Wochen später würde der Gewinn dann $3600 + 21\cdot 200$ Fr
$= 7800$ Fr betragen

b) *(4 Punkte)* **Eine Konkurrenzfirma erzielt ihren grössten Gewinn in der 20. Woche, nämlich 6000 Fr. pro Woche. Den grössten Verlust machte sie in der 50. Woche. Am Anfang des Jahres (t = 0) machte die Firma 3000 Fr. pro Woche Verlust.**
Bestimmen Sie eine ganz rationale Funktion 3. Grades, welche den Gewinn für diese Firma als Funktion der Zeit t (in Wochen) zuordnet.
Ansatz: $G(t) = a\cdot t^3 + b\cdot t^2 + c\cdot t + d$

Maximum in der 20. Woche	$\Rightarrow$	$G'(20) = 0$	$\Rightarrow$	$3\cdot a\cdot 20^2 + 2\cdot b\cdot 20 + c = 0$
Woche 20: 6000 Fr Gewinn	$\Rightarrow$	$G(20) = 6000$	$\Rightarrow$	$a\cdot 20^3 + b\cdot 20^2 + c\cdot 20 + d = 6000$
Minimum in der 50. Woche	$\Rightarrow$	$G'(50) = 0$	$\Rightarrow$	$3\cdot a\cdot 50^2 + 2\cdot b\cdot 50 + c = 0$
Woche 0: 3000 Fr Verlust	$\Rightarrow$	$G(0) = -3000$	$\Rightarrow$	$a\cdot 0^3 + b\cdot 0^2 + c\cdot 0 + d = -3000$

Das Gleichungssystem rechts löst man mit dem Taschenrechner:
$a = \frac{9}{26}$, $b = -\frac{945}{26}$, $c = \frac{13500}{13}$, $d = -3000 \Rightarrow G(t) = \frac{9}{26}\cdot t^3 - \frac{945}{26}\cdot t^2 + \frac{13500}{13}\cdot t - 3000$

6) 3 unabhängige Aufgaben zur Statistik, 10 Punkte

a) ***(3 Punkte)*** **Bei der Mathematikprüfung soll untersucht werden, wie viele der 6 Aufgaben von den 99 Schülerinnen und Schülern sinnvoll bearbeitet wurden. Dabei entstand folgende Tabelle:**

Anzahl Aufgaben sinnvoll bearbeitet	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Anzahl Schülerinnen und Schüler	**3**	**5**	**17**	**11**	**38**	**21**	**4**

Berechnen Sie Mittelwert, Median und Standardabweichung der Anzahl sinnvoll bearbeiteter Aufgaben.

Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{99} \cdot (3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 17 \cdot 2 + 11 \cdot 3 + 38 \cdot 4 + 21 \cdot 5 + 4 \cdot 6) = 3.\overline{56}$

Standardabweichung $s^2 = \frac{1}{99} \cdot (3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 1^2 + 17 \cdot 2^2 + 11 \cdot 3^2 + 38 \cdot 4^2 + 21 \cdot 5^2 + 4 \cdot 6^2) - 3.\overline{56}^2$

$s = \sqrt{1.92246} = 1.3865$

Der Median ist bei der geordneten Reihe der Werte der 50. Wert (=Mitte bei 99 Werten) und beträgt 4.

b) ***(3 Punkte)*** **Die Maturandinnen und Maturanden sollen im Rahmen eines Wettbewerbs ihre 5 schriftlichen Prüfungsnoten erraten. David errät jede einzelne der 5 Noten mit einer Wahrscheinlichkeit von 40%. Die Zufallsvariable X sei die Anzahl Noten, welche David von seinen 5 Noten richtig errät. Berechnen Sie den Erwartungswert E(X).**
(TIPP: Bernoulli–Experiment)

Bernoulli–Experiment mit n = 5 (Versuche, die Note zu erraten), p= 0.4 (Wahrscheinlichkeit, die richtige Note zu raten).
Da es sich um eine binomialverteilte Zufallsvariable handelt, ist E(X) = n·p = 2
Sieht man dies nicht, so ist der herkömmliche Lösungsweg:

Verteilung von X:

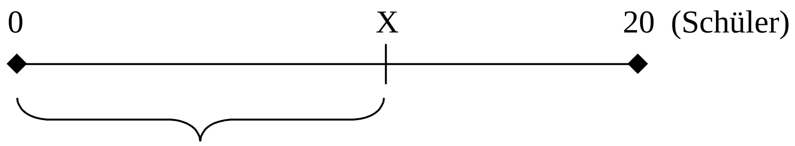
X	0	1	2	3	4	5
P(X=...)	B(5,0.4;0) = 0.0777	B(5,0.4;1) = 0.2592	B(5,0.4;2) = 0.3456	B(5,0.4;3) = 0.2304	B(5,0.4;4) = 0.0768	B(5,0.4;5) = 0.01024

$\Rightarrow$ E(X) = 0.0777·0 + 0.2592·1 + 0.3456·2 + 0.2304·3 + 0.0768·4 + 0.01024·5 = 2

c) ***(4 Punkte)*** **Fabienne behauptet, sie könne die Mathematik–Noten aller 20 Schülerinnen und Schüler ihrer Klasse mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 70% vorhersagen. Sie glauben ihr nicht und führen einen statistischen Test durch: Fabienne soll alle 20 Noten vorhersagen. Bestimmen Sie den Bereich, in dem Fabiennes Behauptung zum Signifikanzniveau von 5% verworfen werden kann. Wie lautet Ihre Entscheidung (in einem kurzen Satz), wenn Fabienne 13 von 20 Noten korrekt vorhersagt?**

Nullhypothese: $p = 70\%$
(Fabienne sagt Noten mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% voraus)

Gegenhypothese: $p < 70\%$
(Fabienne sagt Noten mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 70% voraus)



Verwerfungsbereich [0 , X]

Sagt Fabienne lediglich die Noten von höchstens X Schülern richtig voraus, so können wir Fabiennes Aussage verwerfen.

Tun wir dies, so begehen wir einen Fehler 1. Art = $\sum_{k=0}^{X} B(20,0.7;k)$

Dieser soll kleiner als 5% sein: $\sum_{k=0}^{X} B(20,0.7;k) < 0.05$

$X =$	10	11
$\sum_{k=0}^{X} B(20,0.7;k) =$	4.796%	11.3%

Also muss X = 10 sein, damit der Fehler 1. Art kleiner als 5% ist. Der Verwerfungsbereich ist damit V = [0 , 10]

$\Rightarrow$ Bei 13 von 20 korrekt vorhergesagten Noten kann man Fabiennes Behauptung nicht mit geügender Sicherheit widerlegen.