

MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2007 MATHE – 3 Std.
Klasse 4 Mc – hcs
Maturandin, Maturand (Name, Vorname) Gruppennummer

Hilfsmittel: Taschenrechner
 Fundamentum Mathematik und Physik oder Formelsammlung DMK

Beachten Sie: Jede Aufgabe ist auf einer separaten, mit dem Namen beschrifteten Seite zu lösen, Lassen Sie rechts 2 cm Rand frei.
 Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.
 Alle Teilaufgaben sind voneinander unabhängig lösbar.
 Alle Aufgaben ergeben etwa gleich viele Punkte (nämlich ca. 10).
 In der Regel ergeben 50 Punkte eine Sechs, 30 Punkte eine Vier.
 Wo nicht anders vermerkt, dürfen Sie den Taschenrechner beliebig einsetzen, aber:
Der Lösungsweg muss ersichtlich sein !

1) Analysis, 10 Punkte: Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$.

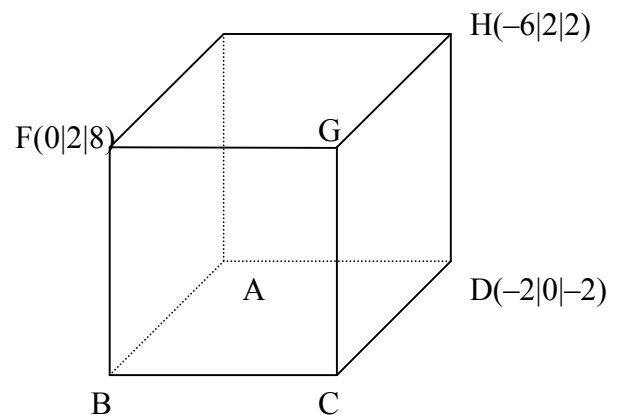
- a) (5 Punkte) Führen Sie eine vollständige Funktionsuntersuchung für f durch (Definitionsmenge, Nullstellen, Extrema, Asymptotengleichungen, asymptotisches Verhalten bei den Definitionslücken, Graph). Die erste Ableitung ist ohne Taschenrechner zu bestimmen.
- b) (3 Punkte) Zeichnen Sie ins dasselbe Koordinatensystem den Graphen der Funktion $g(x) = \frac{2}{x^2}$. Verifizieren Sie, dass die Schnittpunkte der Graphen der beiden Funktionen f und g auf einer Geraden liegen; das heisst bestimmen Sie die Gleichung der Geraden und zeigen Sie, dass alle Schnittpunkte auf der Geraden liegen.
- c) (2 Punkte) Berechnen Sie ohne Hilfe des Taschenrechners die nach rechts unendlich ausgedehnte Fläche, welche vom Graphen von $g(x) = \frac{2}{x^2}$, der x -Achse und der Geraden $x = 1$ eingeschlossen wird.

2) Vektorgeometrie, 10 Punkte: Kugel und Würfel

Der Punkt $M(-1|1|3)$ ist der Mittelpunkt einer Kugel mit Radius $r = 3\sqrt{3}$.

Die Gerade g hat die Gleichung $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

- a) (2.5 Punkte) Berechnen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E , welche die Gerade g und den Punkt M enthält.
- b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass der Punkt $D(-2|0|-2)$ auf der Kugeloberfläche liegt, also dass D zum Mittelpunkt M den Abstand r hat.
- c) (1.5 Punkte) Der Punkt F liegt auf der Kugeloberfläche. Berechnen Sie die Koordinaten von F so, dass \overline{FD} ein Durchmesser der Kugel ist.
- d) (2.5 Punkte) Berechnen Sie die Koordinaten aller Punkte der Geraden g , welche von $M(-1|1|3)$ die Entfernung $r = 3\sqrt{3}$ haben.
- e) (2.5 Punkte) Begründen Sie mit den Methoden der Vektorgeometrie, ob die Ebene $E: 12x - y + 7z - 18 = 0$ den Würfel im Bild rechts schneidet oder nicht.



3) Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik, 10 Punkte: CDs, Songs, Klassik und Pop

In einem Tonstudio wird eine CD mit 8 verschiedenen gesungenen Liedern (Songs) und 5 verschiedenen Instrumentalstücken zusammengestellt.

- a) (1.5 Punkte) Auf wie viele Arten können die Musikstücke angeordnet werden, wenn zuerst alle Songs nacheinander und dann alle Instrumentalstücke nacheinander folgen sollen?
- b) (2 Punkte) Für eine andere CD werden aus den 8 Songs und den 5 Instrumentalstücken insgesamt 9 Musikstücke zufällig ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass darunter genau 6 Songs und 3 Instrumentalstücke sind?
- c) (3 Punkte) Die CD mit den 8 Songs und den 5 Instrumentalstücken wird mit einem CD-Player mit einer Random-Funktion abgespielt, so dass die 13 Musikstücke in zufälliger Reihenfolge endlos mit Wiederholung aufeinander folgen (so kann auch das gleiche Stück mehrmals hintereinander gespielt werden).
- i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ersten 10 gespielten Stücken höchstens 4 Songs sind?
- ii) Wie viele Musikstücke muss man mit der Random-Funktion mindestens abspielen, sodass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% wenigstens 5 Songs gespielt werden?
- d) (3.5 Punkte) Von allen in einem Musikladen verkauften CDs entfallen 25% auf klassische Musik und 30% auf Volksmusik. Der Rest wird der Popmusik zugeordnet. 60% der Käufer einer Klassik-CD und 25% der Käufer einer Popmusik-CD sind älter als 30 Jahre. Insgesamt werden 48% aller verkauften CDs von Kunden erworben, die älter als 30 Jahre sind. (Tipp: Zeichnen Sie einen Baum)
- i) Ein Kunde betritt den Musikladen und kauft eine Volksmusik-CD. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er höchstens 30 Jahre alt?
(Falls Sie keine Lösung finden, rechnen Sie weiter mit $p = 0.7198$)
- ii) Ein Kunde, der älter als 30 Jahre ist, schaut sich im Laden um. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kauft er eine Klassik-CD oder eine Popmusik-CD?

4) **Vektorgeometrie, 10 Punkte: Flugzeuge und Schatten**

Die Piste eines Flughafens liegt in der xy -Ebene eines Koordinatensystems. Ein Flugzeug hebt an der Stelle $A(2|3|0)$ ab und steigt geradlinig in Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Geradengleichung und den Steigungswinkel des startenden Flugzeugs gegenüber der Erdoberfläche (xy -Ebene).

b) (3.5 Punkte) Die Sonne strahlt aus der Richtung $\vec{s} = \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix}$. Wie lautet die Gleichung der Bahn des Schattens, welchen das startende Flugzeug nach dem Abheben auf die Erdoberfläche (xy -Ebene) wirft?

c) (3 Punkte) Ein Beobachter befindet sich auf einem nahen Hügel an der Position $P(-9|11|4)$. Berechnen Sie die minimale Distanz (Abstand) zwischen dem startenden Flugzeug und dem Beobachter.

d) (2.5 Punkte) Gleichzeitig überfliegt ein zweites Flugzeug den Flughafen entlang der Geraden $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den kürzesten Abstand der beiden Flugbahnen.

5) Analysis, 10 Punkte: Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen

Im ehemaligen Kommunistenstaat Woinowien ist die einheimische Froschart der "Breitmaulquäker" stark gefährdet. Woinowische Mathematiker haben eine Näherungsfunktion für den Bestand $B(t)$ der Frösche in Abhängigkeit der Zeit t (in Jahren) seit dem Beginn der Messung 1967 (Jahr $t = 0$) bis heute ($t = 40$) ermittelt:

$$B(t) = 50t^3 - 4050t^2 + 80000t + 300'000 \quad (0 \leq t \leq 40)$$

Skizzieren Sie die Kurve mit Hilfe des Taschenrechners in einem sinnvollen Bereich und beantworten Sie folgende Fragen:

- a) (1 Punkt) In welchem Jahr war der Froschbestand am grössten, und wie gross war dieser zu diesem Zeitpunkt?
- b) (1 Punkt) In welchem Jahr nahm der Froschbestand am stärksten ab?
- c) (1.5 Punkte) Berechnen Sie $B'(12)$. Beschreiben Sie in einem kurzen Satz die Bedeutung dieser Zahl für den Froschbestand, und geben Sie die Einheit an.
- d) (1.5 Punkte) Wann werden die Frösche aussterben, wenn die Abnahmerate des Froschbestands ab dem 40. Jahr konstant bleibt?
- e) (1 Punkt) Wie gross war der durchschnittliche Froschbestand in den letzten 40 Jahren?
- f) (4 Punkte) Heute (Mitte 2007) leben im Staat Woinowien 1.25 Mio Einwohner. Vor exakt 17 Jahren waren es noch 1.5 Mio. Einwohner, während die höchste Einwohnerzahl Mitte des Jahres 1995 erreicht wurde. Woinowien schrumpft weiter: Man geht davon aus, dass in diesem Jahr (2007) die Bevölkerungsabnahme 50'000 Einwohner/Jahr beträgt.

Nähern Sie die Einwohnerzahl Woinowiens in den letzten 17 Jahren durch eine ganz rationale Funktion 3. Grades an. Bestimmen Sie die Koeffizienten auf 3 wesentliche Stellen. Wie gross war damit die maximale Einwohnerzahl von 1995?

6) Unabhängige Kurzaufgaben, 12 Punkte**Wahrscheinlichkeit, Folgen und exponentielles Wachstum: Hotels und Kongresse**

a) (2.5 Punkte) Eine Hotelleitung nimmt 50 Bettreservierungen an. Die Wahrscheinlichkeit für die Absage einer einzelnen Reservation beträgt 15%. Wie viele Betten müssen bereit gehalten werden, wenn das Risiko, dass die Bettenanzahl nicht ausreicht, unter 5% bleiben soll?

b) (3 Punkte, lösen Sie die Gleichungen ohne den Befehl Löse(...))

Der Veranstalter eines Kongresses behauptet, dass die Teilnehmerzahl von Jahr zu Jahr exponentiell zunehme. Am 1. Kongress nahmen 120 Personen teil, beim 5. Kongress (4 Jahre später) schon 1000.

Bei welchem Kongress wird bei exponentiellem Wachstum der Teilnehmerzahl die Marke von 100'000 erstmals überschritten?

c) (2.5 Punkte, lösen Sie die Gleichungen ohne den Befehl Löse(...))

Die Gäste eines Hotels können sich mit einer Unterschrift im Gästebuch verewigen. Am ersten Tag schreiben sich 5 Personen ein, am zweiten Tag 7 Personen, am dritten Tag 9 Personen usw.

Nach wie vielen Tagen werden **insgesamt** erstmals über 10'000 Unterschriften im Buch stehen, wenn an jedem Tag 2 Unterschriften mehr als am Vortag dazukommen?

d) **Extremalwertaufgabe, 4 Punkte: Trapez unter der Parabel**

(2 Punkte) Das Trapez ABCD ist gleichschenkelig.

Die Eckpunkte A und B sind die Nullstellen des Graphen von $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 9$.

Die Punkte C und D liegen auf dem Graphen von f.

Berechnen Sie die Koordinaten von B und C so, dass der Flächeninhalt des Trapezes maximal wird.

Berechnen Sie das Maximum mit Hilfe des Taschenrechners.

Viel Glück !