Kantonsschule Romanshorn

Thurgau

MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2008

Mathematik – 3 Std.

Maturandin, Maturand (Name, Vorname) **Klasse 4 Md – hcs**

....

Hilfsmittel
- Taschenrechner
- Fundamentum Mathematik und Physik oder Formelsammlung DMK

Beachten Sie
- Jede Aufgabe ist auf einer separaten, mit dem Namen beschrifteten Seite zu lösen.
- Lassen Sie rechts 2 cm Rand frei.
- Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.
- Alle Teilaufgaben sind voneinander unabhängig lösbar.
- Alle Aufgaben ergeben etwa gleich viele Punkte (nämlich ca. 10), total sind 62.5 Punkte möglich.
- In der Regel ergeben 50 Punkte eine Sechs, 30 Punkte eine Vier.
- Wo nicht anders vermerkt, dürfen Sie den Taschenrechner beliebig einsetzen, aber:

- **Der Lösungsweg muss ersichtlich sein !**

Viel Glück!

leer lassen

Aufg 1	Aufg 2	Aufg 3	Aufg 4	Aufg 5	Aufg 6		total

Note: __________

1) **Kurvendiskussion, 11 Punkte**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2}$$

sowie die Gerade g mit der Gleichung

$$y = ax - 2a + 4 \qquad a \in \mathbb{R}$$

a) *(5 Punkte)* Berechnen Sie …

i) den Definitionsbereich D.

ii) die Nullstelle N (Lösen Sie die Gleichung ohne Taschenrechner).

iii) den Extremalpunkt E (Berechnen Sie die erste Ableitung ohne Taschenrechner).

iv) den Wendepunkt W.

v) Zusätzlich zur vertikalen Asymptote besitzt die Funktion noch eine weitere Asymptote. Bestimmen Sie ihre Gleichung.

vi) Skizzieren Sie mit Hilfe dieser Daten den Graphen von f im Bereich $-4 \leq x \leq 9$ inklusive aller Asymptoten.

b) *(1 + 2 Punkte, wenn Sie das Integral ohne Taschenrechner lösen)*
Die Punkte $P(1|y_P)$ und $R(2|y_R)$ des Graphen legen die Strecke PR fest. Berechne den Inhalt der Fläche, die diese Strecke mit dem Graphen einschliesst.

Tipp: $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2} = 1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}$

c) *(3 Punkte)* Die Gerade g geht für jeden Parameterwert a durch den Kurvenpunkt Q(2|4).

i) Bestimme a so, dass die Gerade g Tangente an die Kurve wird.

ii) Für welche Parameterwerte a besitzt die Gerade g nur diesen einen gemeinsamen Punkt Q mit dem Graphen?

2) **Vektorgeometrie, 10 Punkte**

Gegeben sind die Geraden $g: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und die Ebenen $E: \quad x + 3y - z - 18 = 0$ und $F: \quad 2x - y + 2z - 12 = 0$.

a) *(1.5 Punkte)* Berechnen Sie den Schnittpunkt A von g und F.

b) *(1.5 Punkte)* Berechnen Sie den Neigungswinkel der Geraden g zur Ebene E.

c) *(1.5 Punkte)* Beweisen Sie, dass g parallel zur Ebene F ist.

d) *(1.5 Punkte)* Berechnen Sie den Abstand von g zur Ebene F.

e) *(2 Punkte)* Bestimmen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s zwischen den Ebenen E und F.

f) *(2 Punkte)* Berechnen Sie die Länge der kürzesten Transversalen (Strecke) zwischen g und der Schnittgeraden s von Teilaufgabe e).

Wenn Sie s in Aufgabe f) nicht bestimmen konnten verwenden Sie $s: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, 13 Punkte

a) *(4 Punkte)* Das Skisportlager der Kantonsschule Romanshorn wird jedes Jahr in der Skihütte „Arvenstube“ in Klosters durchgeführt. Die Hütte hat 5 Einzelzimmer für Leiter und 60 Betten für Schülerinnen und Schüler. Untersuchungen der letzten Jahre haben gezeigt, dass jedes Jahr durchschnittlich 20% der Lernenden die Anmeldung wieder zurückziehen. Damit dennoch das Lager mit 60 Schülerinnen und Schüler durchgeführt werden kann, werden mehr als 60 Anmeldungen entgegen genommen.

i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Lager überbelegt, wenn 72 Anmeldungen entgegen genommen werden?

ii) Wie viele Anmeldungen dürfen entgegen genommen werden, damit die Wahrscheinlichkeit einer Überbelegung unter 2% sinkt?

iii) Die Schülerinnen und Schüler sind dieses Jahr viel seriöser geworden und man nimmt an, dass die Anmeldungsrückzüge auf 15% gesunken sind. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 72 Anmeldungen niemand abgewiesen werden muss?

b) *(3.5 Punkte)* Die Schülergruppe besteht aus 25 Mädchen und aus 35 Knaben. Da sich die Knaben beim Skifahren oft ein wenig überschätzen, verunfallen sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 5%. Im Gegensatz dazu verunfallen die Mädchen nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 2%. Besonders vorsichtig fahren die fünf Leiter, deren Wahrscheinlichkeit für einen Unfall nur 1% beträgt.

i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der teilnehmenden Personen verunfallt (egal ob Mädchen, Knaben oder Leiter)?

ii) Es ist tatsächlich eine teilnehmende Person verunfallt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die verunfallte Person ein Knabe ist?

c) *(2.5 Punkte)* Die Gruppe der besten Skifahrer und Skifahrerinnen besteht aus 10 Mitgliedern und einem Leiter.

i) Wie viele Möglichkeiten der Reihenfolge gibt es, wenn der Leiter voraus fährt und die Schüler und Schülerinnen in Einerkolonne hinterherfahren?

ii) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn zuerst die 4 Mädchen hintereinander und dann die 6 Knaben hintereinander fahren?

d) *(3 Punkte)* Am Abend muss aus den insgesamt 65 Teilnehmern ein Abwaschkomitee gebildet werden. Es besteht aus einem Leiter, 3 Knaben und 2 Mädchen.

i) Wie viele Möglichkeiten gibt es, dieses Komitee zusammen zu stellen?

ii) Wie viele Möglichkeiten bleiben, wenn sich Maria (Schülerin) weigert, mit Hans (Schüler) abzuwaschen?

4) **Kurvendiskussion – Anwendung, 11.5 Punkte**

An der Kantonsschule Romanshorn verbreitet sich ein Gerücht. Die Verbreitung eines Gerüchts lässt sich mit einem logistischen Modell simulieren. Die Funktion P(t) bezeichnet die Anzahl Personen, welche das Gerücht zur Zeit t (in Tagen) kennen:

$$P(t) = \frac{800}{1 + 799 \cdot e^{-0.5t}}$$

a) *(3 Punkte)* Skizzieren Sie den Graphen der Funktion mit dem Taschenrechner. Beantworten Sie anschliessend folgende Fragen mit Hilfe des Taschenrechners.

i) Berechne die Anzahl der "Wissenden" (die Personen, welche das Gerücht kennen) nach 10 Tagen.

ii) Wann kennen 500 Personen das Gerücht?

iii) Wann ist die Zunahme der "Wissenden" am grössten?

b) *(1.5 Punkte)* Berechnen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} P(t)$ und erklären Sie kurz in wenigen Sätzen die Bedeutung der Lösungszahl.

c) *(2.5 Punkte)* Beobachtungen haben ergeben, dass innerhalb von 10 Tagen schon die Hälfte der Personen an der Kantonsschule Romanshorn das Gerücht kennt. Ändern Sie den Faktor k in der Funktionsgleichung $P(t) = \dfrac{800}{1 + 799 \cdot e^{-k \cdot t}}$ ab, um dieser Beobachtung zu entsprechen.
Lösen Sie die Gleichung ohne den Befehl *Löse(...)* des Taschenrechners.

d) *(4.5 Punkte)* Die Verbreitung des Gerüchts soll für den Bereich $0 \leq t \leq 36$ neu mit einem anderen Ansatz beschrieben werden, nämlich mit einem Graphen einer ganz rationalen Funktion 3. Grades. Von diesem weiss man folgendes:

- Zum Zeitpunkt t = 0 kennt eine Person das Gerücht.
- Nach 10 Tagen kennen 125 Personen das Gerücht.
- Nach 36 Tagen kennen 800 Personen das Gerücht.
- Der Graph hat bei t = 36 ein lokales Maximum.

i) Berechnen Sie die Funktionsgleichung dieser Näherungsfunktion.

ii) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner die durchschnittliche Abweichung dieser Näherungsfunktion 3. Grades vom logistischen Modell in a).

5) Vektorgeometrie – Anwendung, 8.5 Punkte

Ein Flugzeug fliegt auf einer geradlinigen Flugbahn und legt pro Minute den Vektor $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ -0.2 \end{pmatrix}$ zurück. Es fliegt auf einen ebenen Berghang zu, auf welchem ein Bergdorf bei B(30|–20|1.2) und die Punkte A(28|–20|0.8) und C(29|–18|1) liegen. Um exakt 12.31 Uhr befindet sich das Flugzeug bei den Koordinaten F(25.8|–12|4) (Angaben in km).

a) *(1 Punkt)* Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Flugzeugs in km/h.

b) *(2 Punkte)* Berechnen Sie eine Koordinatengleichung des Berghangs (Ebene ABC).
Falls Sie keine Lösung finden, rechnen Sie weiter mit E: $x + y + 4z - 13.6 = 0$

c) *(2.5 Punkte)* Die Sonne scheint senkrecht zum Berghang (Ebene ABC). In welchem Punkt auf dem Berghang befindet sich der Schatten des Flugzeugs?

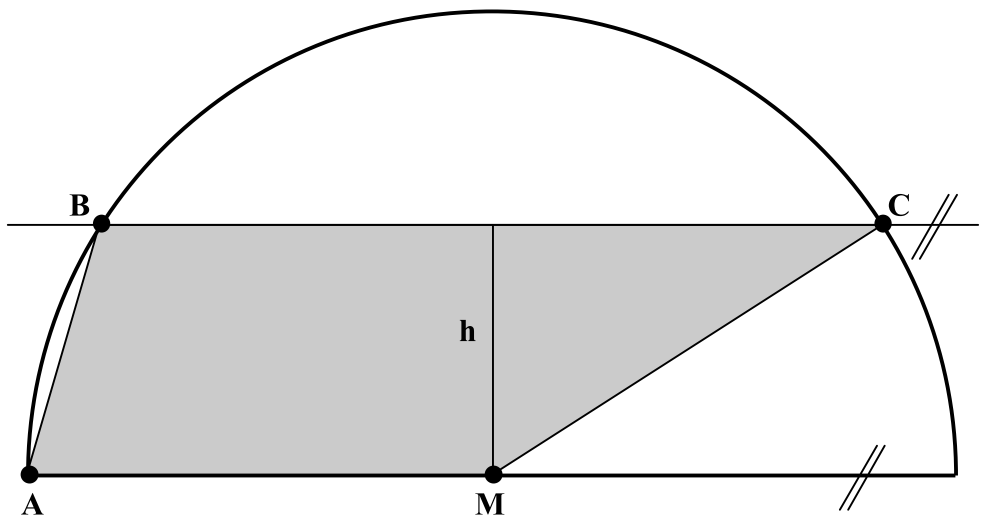
d) *(3 Punkte)* Im Bergdorf B ist eine Funkstation mit einer Reichweite von 18 km. In welchem Zeitraum (Uhrzeit auf Sekunden genau) kann das Flugzeug angefunkt werden?

6) **Kurzaufgaben, 8 Punkte**

a) **Extremalaufgabe 4 Punkte**
In einen Halbkreis mit Radius r = 1 soll ein Viereck mit möglichst grossem Flächeninhalt nach folgenden Regeln einbeschrieben werden (siehe Bild unten):

- Der Radius AM auf der Grundlinie des Halbkreises ist eine Seite des Vierecks, wobei M der Mittelpunkt des Grundkreises ist.
- Die beiden anderen Ecken B und C sind die Schnittpunkte des Halbkreises mit einer zu (AM) parallelen Geraden.

In welchem Abstand h zur Grundlinie AM muss man die parallele Gerade wählen, damit das Dreieck ABCM einen möglichst grossen Flächeninhalt besitzt?



b) **Wahrscheinlichkeitsrechnung, 4 Punkte**
Bei einem Glückspiel mit einem Einsatz von 30 Franken werden aus einem Beutel mit 10 Kugeln zufällig drei Kugeln gezogen. Im Beutel liegen acht Kugeln mit der Aufschrift 1 und je eine Kugeln mit der Aufschrift 10 und eine Kugel mit der Aufschrift 100. Die Summe der Aufschriften der gezogenen Zahlen wird dem Spieler in Franken ausbezahlt.
Es sei X der Gewinn bei einem Spiel. Berechnen Sie E(X) und die Standardabweichung s des Gewinns X bei einem Spiel.