Kantonsschule Romanshorn

Thurgau

MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2009

Mathematik – 3 Std.

Maturandin, Maturand (Name, Vorname) **Klasse 4 Mcd – hcs**

....

Hilfsmittel

- Taschenrechner (TI-Voyage 200, TI-92, TI-89)
- Fundamentum Mathematik und Physik oder Formelsammlung DMK

Beachten Sie

- Jede Aufgabe ist auf einer separaten, mit dem Namen beschrifteten Seite zu lösen.
- Lassen Sie rechts 2 cm Rand frei.
- Runden Sie alle Ergebnisse auf 2 Stellen nach dem Dezimalpunkt.
- Streichen Sie falsche Lösungen deutlich durch.
- Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.
- Alle Teilaufgaben sind voneinander unabhängig lösbar.
- Alle Aufgaben ergeben etwa gleich viele Punkte (nämlich ca. 12), total 72 Punkte.
- In der Regel ergeben 60 Punkte eine Sechs, 36 Punkte eine Vier.
- Wo nicht anders vermerkt, dürfen Sie den Taschenrechner beliebig einsetzen, aber:
- **Der Lösungsweg muss ersichtlich sein !**

Viel Glück!

leer lassen

Aufg 1	Aufg 2	Aufg 3	Aufg 4	Aufg 5	Aufg 6		total

Note: __________

1) **Kurvendiskussion einer gebrochen rationalen Funktion, 13 Punkte**

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} - \frac{1}{x^2}$

$$= \frac{(x-2)(x^2+x+2)}{4x^2}$$

a) *(6 Punkte)* Kurvendiskussion und Graph:

i) Untersuchen Sie die Funktion auf Definitionsbereich, Nullstellen, Punkte mit waagrechter Tangente und Wendepunkte. Berechnen Sie die Ableitungen ohne den Taschenrechner.

ii) Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten der Funktion an.

iii) Stellen Sie mithilfe der obigen Ergebnisse den Graphen von f in einer aussagekräftigen Zeichnung dar.

iv) Zeichnen Sie ebenfalls die Asymptoten in einer separaten Farbe ein.

b) *(4 Punkte)* Die Gerade mit der Gleichung $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$, der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = b$ (mit $b > 2$) schliessen im 1. Quadranten eine Fläche ein.

i) Stellen Sie auch diese Fläche in Ihrer Zeichnung dar.

ii) Berechnen Sie den Inhalt A(b) dieser Fläche in Abhängigkeit von b. Berechnen Sie die Stammfunktion ohne den Taschenrechner

iii) Berechnen Sie A(b) für $b \to \infty$.

c) *(3 Punkte)* Die Tangente bei $x = 2$ hat mit dem Graphen von f(x) einen weiteren Punkt gemeinsam. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punktes.

2) **Vektorgeometrie, 12 Punkte**

Gegeben sind die Punkte $S(1|2|8)$, $T(4|2|-4)$ sowie die Ebene mit der Koordinatengleichung $E: y - 2z - 6 = 0$.

a) *(3 Punkte)* Zeigen Sie, dass $M(1|6|0)$ der Punkt der Ebene E ist, der von S den geringsten Abstand hat. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes S von E.

b) *(2 Punkte)* Durch S und T ist eine Gerade h festgelegt. Bestimmen Sie die Koordinaten des Durchstosspunktes (Schnittpunkt) D dieser Gerade h mit der Ebene E. *(Ergebnis: $D(3.5|2|-2)$)*

c) *(1 Punkt)* In welchem Verhältnis teilt D die Strecke $\overline{ST}$?

d) *(2 Punkte)* In welchem Winkel schneidet die Gerade h die Ebene E? Geben Sie den spitzen Schnittwinkel an.

e) *(2 Punkte)* Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks SMD.

f) *(2 Punkte)* Lässt man das Dreieck SMD um die Strecke $\overline{SM}$ rotieren, entsteht ein gerader Kreiskegel. Bestimmen Sie das Volumen dieses Kreiskegels.

3) **Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kombinatorik, 12 Punkte**

Gegeben sind drei sechsseitige, faire Würfel. Die Beschriftung ist jedoch besonders:
Würfel A ist mit den Augenzahlen 3, 3, 3, 3, 5, 5 beschriftet.
Würfel B ist mit den Augenzahlen 1, 1, 3, 3, 6, 6 beschriftet.
Würfel C ist mit den Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 beschriftet.

a) *(2 Punkte)* Berechnen Sie für jeden Würfel die Wahrscheinlichkeit, eine Zahl grösser als 3 zu werfen.

b) *(2 Punkte)* Welcher dieser drei Würfel wird sich auf Dauer als der beste Würfel erweisen, wenn es darum geht, eine möglichst grosse Augenzahl zu werfen? Begründen Sie Ihre Antwort rechnerisch.

c) *(3 Punkte)* Würfel A und Würfel B werden gemeinsam geworfen. Die geworfenen Zahlen werden summiert.

   i) Stellen Sie diesen Vorgang in einem Baumdiagramm dar und beschriften Sie dieses ausreichend.

   ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man eine Augensumme grösser als 6?

d) *(3 Punkte)* Ein Spieler greift ohne hinzusehen einen der drei Würfel heraus und wirft ihn. Dieser Würfel zeigt die Augenzahl 3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es Würfel A?

e) *(2 Punkte)* Würfel A wird nun genommen und 25-mal hintereinander geworfen. Die Augenzahlen werden notiert und aufsummiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die geworfene Summe grösser als 90?

4) **Kurvendiskussion – Anwendung, 12 Punkte**

a) **Kurvendiskussion – Anwendung, 2. Teil, 7 Punkte**
Die Funktion $f(t) = -0.01t^3 + 0.24t^2 + 6$ beschreibt modellhaft den Temperaturverlauf eines Sommertages in Romanshorn in der Zeit von 06:00 Uhr bis um 21:00 Uhr. (Dabei ist t die Uhrzeit in Stunden und f(t) die Temperatur in °C .

i) *(3 Punkte)* Berechnen Sie mit dem Taschenrechner die Temperatur zu Beginn und am Ende des vorgegebenen Zeitintervalls. Berechnen Sie weiter die Uhrzeiten, zu welcher der Tageshöchstwert und der Tagestiefstwert erreicht wird.

ii) *(2 Punkte)* Ermitteln Sie den Zeitraum, in dem die Temperatur mindestens 20 °C betrug.

iii) *(2 Punkte)* Berechnen Sie die durchschnittliche Temperatur in der Zeit von 06:00 Uhr bis um 21:00 Uhr.

b) **1. Teil, Auto steckt im Kirchendach, 5 Punkte**
Am 26. Januar 2009 geschah in Limbach-Oberfrohnah (D) ein spektakulärer Unfall. Ein Auto fuhr mit überhöhter Geschwindigkeit eine Böschung hinauf und landete 7 Meter höher in einem Kirchendach. Der Tagesanzeiger schreibt dazu am 29. Januar 2009:

[...] Das Bild vom überdrehten Raser, der mit 200 km/h durch eine Ortschaft jagt, dürfte in diesem Fall allerdings nicht unbedingt zutreffen, wie eine Berechnung der Redaktion von Tagesanzeiger.ch/Newsnetz anhand von Angaben zum Unfallhergang ergab. Freilich mit einigen Vereinfachungen: Weil die Böschung, über die hinweg der Unglücksfahrer abhob, nach Angaben der Pressestelle der Polizeidirektion Chemnitz-Erzgebirge nur knapp einen Meter hoch war, setzte die Redaktion als Modell eine einfache Wurfparabel voraus:

$$y(x) = \tan(\beta)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\beta}x^2$$

Diese Formel beschreibt die Höhe y eines geworfenen Gegenstands - abhängig von der zurückgelegten Weite x sowie der Geschwindigkeit v und dem Winkel b zur Erdoberfläche beim Start der Parabel. Mit Hilfe mathematisch gebildeter Kollegen wurde die Gleichung so umgerechnet, dass als Zielgrösse die Geschwindigkeit am Beginn des Fluges links des Gleichzeichens steht. Alle anderen Grössen waren bekannt: Der Wagen schlug nach Angaben der Chemnitzer Polizeidirektion nach einem Flug von 35 Metern (x) in einer Höhe von sieben Metern (y) in das Kirchendach ein. Der Wert g beschreibt den Einfluss der Erdanziehungskraft und beträgt 9.81 Meter pro Sekunde zum Quadrat.

Beim Abhebewinkel entschied sich die Redaktion sicherheitshalber für zwei Varianten, nämlich 35 Grad und 45 Grad, die bei einer Strassenböschung zutreffen dürften. Heraus kamen schliesslich, ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands, Geschwindigkeiten von knapp 100 und gut 75 km/h - ein Ergebnis, das sich mit einer Berechnung an der Technischen Universität Chemnitz deckt.
[...]

Anmerkung: Die 75 $\frac{km}{h}$ entsprechen ungefähr $v_0 = 21\,\frac{m}{s}$

(5 Punkte) Setzen Sie für $v_0 = 21\,\frac{m}{s}$, $\beta = 45°$ und berechnen Sie

i) die maximale Höhe die das Auto erreichte,

ii) die Höhe nach 35 m Flugweite,

iii) den Winkel der Flugrichtung des Autos zur Horizontalen nach 35 m Flugweite,

iv) und die Dauer des Fluges für die zurückgelegten 35 m.

5) **Vektorgeometrie – Anwendung, 11 Punkte**

Ein Fallschirmspringer passiert bei seinem Sinkflug die Koordinaten beim Punkt A(38|–12|2.5) und fliegt auf einer geradlinigen Flugbahn in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$.

Er landet auf einem Berghang, welcher durch die Gleichung E: $y + 10z + 7.4 = 0$ beschrieben wird (Angaben in km).

a) *(2 Punkte)* Wie weit (kürzeste Distanz zum Hang) ist der Fallschirmspringer im Punkt A vom Berghang E entfernt?

b) *(2 Punkte)* Landeplatz

i) Berechnen Sie den Ort L, an dem der Fallschirmspringer landet.

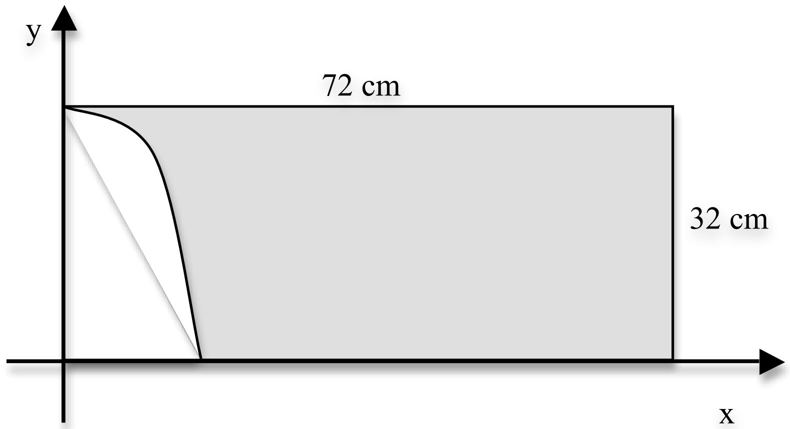
ii) Wie lange dauert es in Minuten und Sekunden, bis der Springer vom Punkt A bis zur Landung im Punkt L gefallen ist, wenn er mit 30 km/h unterwegs ist?

c) *(2 Punkte)* Am Punkt B(40|–12|0.8) schwebt ein Werbeballon einer Autogarage. Wie nah ist die kürzeste Distanz der Flugbahn des Fallschirmspringers und dem für ihn gefährlichen Ballon?

d) *(3 Punkte)* Das Kabel einer Seilbahn verläuft entlang der Geraden s:
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 20 \\ 0.7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 0.1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die kürzeste Distanz des Kabels und der Flugbahn des Fallschirmspringers.

6) **2 Kurzaufgaben, 12 Punkte**

a) **Extremalaufgabe, 5 Punkte**
Von einer rechteckigen Platte mit den Seiten a = 32 cm und b = 72 cm fehlt ein parabelförmiges Stück $p(x) = -\frac{1}{8}x^2 + 32$ Aus dem Reststück soll ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt A herausgeschnitten werden. Wie lang sind diese Seiten?



b) **Wahrscheinlichkeitsrechnung, 7 Punkte**
Der Würfel A (aus der Aufgabe 3) ist mit den Augenzahlen 3, 3, 3, 3, 5, 5 beschriftet.

i) *(5 Punkte)* Bei einem Glücksspiel wirft man 10 Mal diesen Würfel.

Wirft man genau 10 Mal eine Fünf, so erhält man 10'000 Franken.
Wirft man mindestens 8 Mal eine Drei, so erhält man 100 Franken.
Wirft man genau 5 Mal eine Drei und 5 Mal eine Fünf, so erhält man 50 Franken.
In allen anderen Fällen muss man 5 Franken bezahlen.

Es sei X der Gewinn / Verlust bei einem Spiel. Berechnen Sie E(X) und die Streuung (Standardabweichung) s dieses Spiels.

ii) *(2 Punkte)* Wie viele Male muss man den Würfel mindestens werfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens 4 Mal eine Fünf zu werfen?