Kantonsschule Romanshorn

Thurgau

MATURITÄTSPRÜFUNGEN 2014

MATHEMATIK – 3 Std.

Maturandin, Maturand (Name, Vorname) **Klasse 4 Ms/t – hcs**

....

Datum: *Dienstag, 10. Juni 2014*

Punkte:		**Note:**	

Vorbemerkungen:

1 Zeit: 180 Minuten

2 Max. erreichbare Punktzahl: 72 Punkte

3 Erlaubte Hilfsmittel: PC/Laptop (Matlab), einfacher Taschenrechner Fundamentum Mathematik und Physik oder Formelsammlung DMK

4 Beachten Sie

Lösen Sie die Aufgaben direkt auf diesem Bogen auf der entsprechenden Doppelseite.
Nutzen Sie bei Platzmangel die hintersten leeren Seiten und vermerken Sie dies bei der entsprechenden Aufgabe.
Lassen Sie rechts 2 cm Rand frei, schreiben Sie NICHT mit Bleistift.
Runden Sie alle Ergebnisse sinnvoll.
Streichen Sie falsche Lösungen deutlich durch.
Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge gelöst werden.
Alle Teilaufgaben sind voneinander unabhängig lösbar.
Die Punktzahlen der Aufgaben können Sie der Tabelle entnehmen, verschaffen Sie sich zunächst einen Überblick. Total sind 72 Punkte möglich.
In der Regel ergeben ca. 60 Punkte eine Sechs, 36 Punkte eine Vier.
Wo nicht anders vermerkt, setzen Sie Matlab beliebig ein, aber:
Der Lösungsweg muss ersichtlich sein!

Viel Glück!

leer lassen

Aufg 1	Aufg 2	Aufg 3	Aufg 4	Aufg 5	Aufg 6		total
von 13	von 11	von 12	von 12	von 11	von 13		von 72

1) **Kurvendiskussion einer gebrochen rationalen Funktion und Flächenberechnung** **Total 13 P**

a) **Kurvendiskussion einer gebrochen rationalen Funktion** **7 P**

Benützen Sie bei dieser Aufgabe Matlab für alle Berechnungen. Stellen Sie aber den Lösungsweg sauber und vollständig dar.

Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion für die Funktion
$f(x) = \frac{4x}{(x-2)^2}$ durch. Berechnen Sie dazu:

i) den Definitionsbereich
ii) die Nullstellen
iii) die Hoch– und Tiefpunkte
iv) die Gleichungen der Asymptoten
v) das Verhalten bei den Polstellen bzw. die Limites bei den Definitionslücken
vi) Wendepunkte
vii) Skizzieren Sie mit Hilfe der obigen Daten den Graphen von f(x) in einem sinnvollen Bereich. Achten Sie auf eine saubere Darstellung und vollständige Beschriftung. Zeichnen Sie auch die Asymptoten ein.

b) **Fläche und Tangente** **6 P**

i) Zeigen Sie ohne Hilfe von Matlab, dass $F(x) = 4\cdot\ln(x-2) - \frac{4x}{x-2}$ eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{4x}{(x-2)^2}$ (aus Teilaufgabe a) ist. 2 P

ii) Die Funktion f, die x–Achse und die beiden Geraden y = x und x = 10 schliessen im 1. Quadranten eine Fläche ein. Berechnen Sie diese Fläche mit der Stammfunktion aus i). Lösen Sie allfällige Gleichungen mit Matlab. 2 P

iii) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x = 6. 2 P

2) Vektorgeometrie – Zwei Flugkörper über dem Meer 11 P

Eine auf dem Meer befindliche Peilstation bei den Koordinaten (0|0|0) ermittelt die Positionen zweier Flugkörper. Diese werden um 11:32 Uhr mit den Koordinaten (0|1|1) und (2|10|2) angegeben (alle Masseinheiten in km). 30 Sekunden später befinden sich die Flugkörper an den Positionen (0.5|3.5|5.5) bzw. (1.5|8|6).

a) Geben Sie die Geschwindigkeiten der beiden Flugobjekte in km pro Stunde (km/h) an. 2 P

b) Nehmen wir an, dass die beiden Flugkörper auf geradlinigen Bahnen fliegen. Zeigen Sie rechnerisch, dass diese unmittelbar später in der Luft im Punkt (1|6|10) zusammenstossen. Geben Sie zudem den Zeitpunkt der Kollision an. 3 P

c) Unmittelbar nach der Kollision stürzt einer der Flugkörper senkrecht ins Meer, während der zweite auf einer geradlinigen Flugbahn mit dem Geschwindigkeitsvektor $\begin{pmatrix} 60 \\ 300 \\ -200 \end{pmatrix}$ (Masseinheit km/h) auf die Meeresoberfläche stürzt. Wie weit sind die Aufschlagpunkte der beiden Flugkörper von der Peilstation bei (0|0|0) entfernt?
Die Meeresoberfläche ist die xy–Ebene mit der Gleichung z = 0. 4 P

d) Berechnen Sie den Winkel, unter dem das zweite Flugobjekt mit dem oben angegeben Geschwindigkeitsvektor auf das Meer stürzt. Zeigen Sie mit einer Skizze, welchen Winkel sie berechnet haben. 2 P

3) Ostern – Wahrscheinlichkeitsrechnung 12 P

Alfons und Berta bekommen zu Ostern je ein Osternest. Die Mutter hat farbige Eier gekauft und verteilt diese folgendermassen in die Osternester von Alfons und Berta:

- Osternest Alfons: ein rotes, zwei blaue und vier grüne Ostereier
- Osternest Berta: zwei rote, zwei blaue und drei gelbe Ostereier

a) Alfons und Berta essen jeweils drei Eier. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Berta ihre drei gelben Ostereier gegessen hat? 1 P

Die gegessenen Eier werden von der Grossmutter ersetzt, so dass die beiden Ostereierkörbe wieder in der oben beschriebenen Ausgangssituation sind.

b) Alfons und Berta spielen ein Spiel. Jeder verschliesst die Augen und nimmt sich zwei verschiedene Ostereier aus dem Körbchen des anderen. Haben diese die gleiche Farbe, so bekommt man einen Punkt. Wer hat bei dem Spiel die besseren Gewinnchancen? Begründen Sie rechnerisch. 4 P

c) Gehe in dieser Aufgabe davon aus, dass Berta eine Gewinnchance von 30% hat. Alfons und Berta spielen das Spiel zehn Mal.
   i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Berta genau einmal gewinnt? 1 P
   ii) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Berta mindestens dreimal gewinnt? 2 P
   iii) Wie oft müssten die beiden das Spiel spielen, damit die Chance, dass Berta mindestens einmal gewinnt, grösser als 90% wird? 2 P

Die gegessenen Eier werden von der Grossmutter ersetzt, so dass die beiden Ostereierkörbe wieder in der oben beschriebenen Ausgangssituation sind.

d) Nach einigen Spieldurchläufen wird es den beiden langweilig. Sie essen ein Ei und zwar jeweils aus ihrem eigenen Korb.
   i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide ein blaues Ei gegessen haben? 1 P
   ii) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein blaues Ei gegessen wurde? 1 P

4) Diskussion einer Näherungsfunktion – Entwicklung des Rohstoffpreises **12 P**

Maturicum ist ein wertvoller Rohstoff auf dem Planeten 4M. Es sei M(t) eine Funktion, welche den aktuellen Tagespreis von Maturicum im Monat Mai angibt: M(t) ist der Preis einer Tonne Maturicum in $ (Dollar) zum Zeitpunkt t (in Tagen gemessen) während den 31 Tagen des Monats Mai (siehe Graph unten).

$$M(t) = -0.002t^3 + 0.06t^2 + 30 \quad (0 \le t \le 31)$$

a) Wie teuer war eine Tonne Maturicum am 10. Mai? 1 P

b) *Berechnen Sie die nötigen Ableitungen und lösen Sie die Gleichungen ohne die entsprechenden Befehle von Matlab:*
Wann hat Maturicum den höchsten und wann den tiefsten Preis im Mai erreicht und wie gross war dieser Preis dann jeweils? 4 P

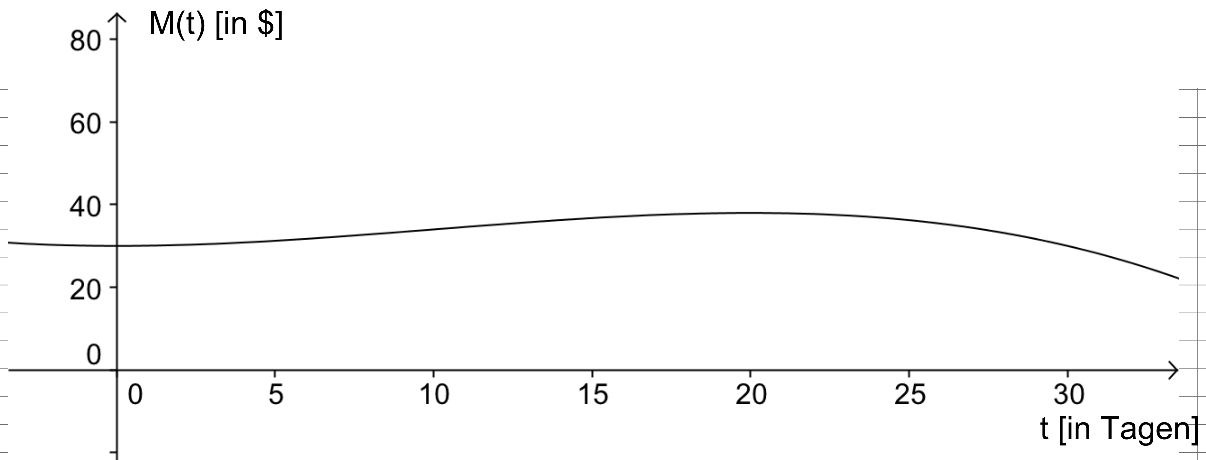
c) Zu welchem Zeitpunkt nahm der Preis von Maturicum am stärksten zu? 1 P

d) Berechnen Sie M'(20) und geben Sie in einem Satz an, was die Lösungszahl für den Preis von Maturicum bedeutet. 2 P

e) *Lösen Sie die Gleichungen ohne die entsprechenden Befehle von Matlab:*
An welchem Tag ist der Preis von Maturicum erstmals wieder gleich hoch wie zu Beginn des Monats Mai (also bei t = 0)? 2 P

f) Wie gross war der durchschnittliche Preis von Maturicum im Monat Mai? 2 P

Benützen Sie die Formel $\overline{f_{[a,b]}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ für den Mittelwert einer Funktion f auf dem Intervall [a,b] und geben Sie zusätzlich eine Stammfunktion von M an.



5) Vektorgeometrie 11 P

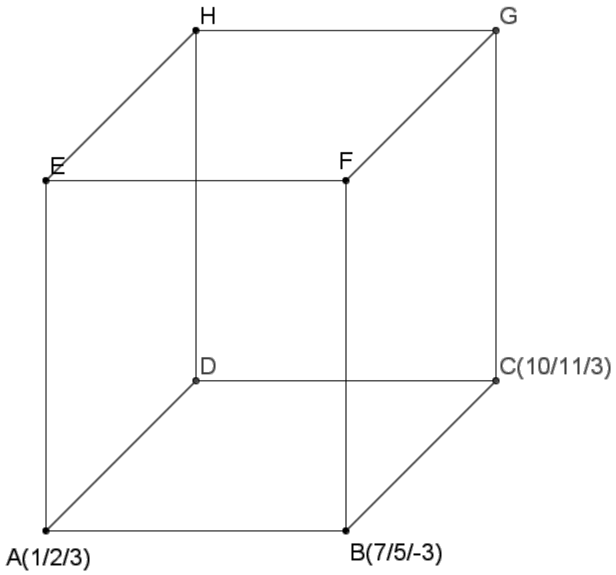
a) A(1|2|3), B(7|5|–3) und C(10|11|3) sind die Eckpunkte eines Quaders (siehe Bild links).

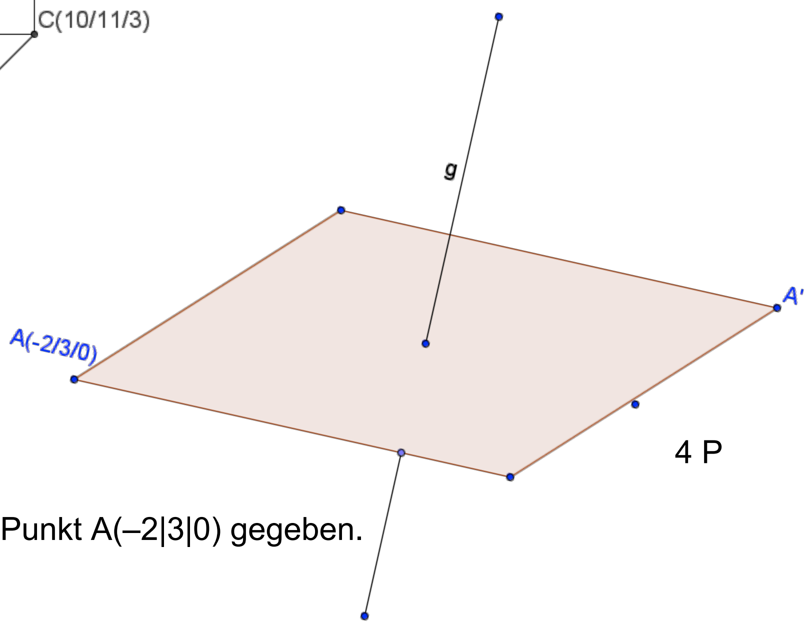
i) Zeigen Sie, dass die Kanten AB und BC gleich lang sind. 1 P

ii) Zeigen Sie, dass in der Grundfläche ABCD bei B ein rechter Winkel vorliegt. 1 P

iii) Das Viereck ABCD ist ein Quadrat. Geben Sie die Koordinaten von D an. 1 P

iv) Die Eckpunkte E, F, G und H liegen in einer Ebene, die durch die Gleichung $2x - 2y + z - 37 = 0$ beschreiben wird. Geben Sie die Koordinaten von F an. 4 P





b) Im Bild rechts ist die Gerade 4 P

$$g: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 5.5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ und der Punkt A(–2|3|0) gegeben.

i) Geben Sie die Gleichung der Ebene E an, die senkrecht auf der Geraden g steht und durch den Punkt A geht.

ii) Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Geraden g.

6) Drei unabhängige Aufgaben, (b und c sind auf den nächsten Seiten) **Total 13 P**

a) **Wahrscheinlichkeitsrechnung** **4 P**

Bei 0.07% aller neugeborenen Kinder liegt eine bestimmte Stoffwechselstörung vor. Wird die Störung frühzeitig erkannt, kann sie therapiert werden. Zur Früherkennung wird deshalb bei allen Neugeborenen ein Test durchgeführt. Zeigt der Test eine Stoffwechselstörung an, so wird das Ergebnis als positiv bezeichnet.
Liegt bei einem neugeborenen Kind die Stoffwechselstörung vor, so ist das Testergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von 99.5% positiv.
Liegt die Stoffwechselerkrankung nicht vor, so beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass das Testergebnis irrtümlicherweise positiv ausfällt 0.8%.

i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test negativ ausfällt, obwohl die Stoffwechselstörung vorliegt?
ii) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein positiv getestetes Kind die Stoffwechselstörung tatsächlich gar nicht hat?
iii) Wie muss man aufgrund der obigen Resultate ein positives Ergebnis des Tests über alle Testpersonen gesehen einstufen?

b) **Extremalaufgabe – Ein Drahtmodell** **5 P**

Eine quaderförmige Schachtel mit quadratischem Grundriss muss ein Volumen von 72 dm^3 haben. Allerdings kostet das Material für die Grundfläche (den Boden der Schachtel) wegen einer speziellen Beschichtung 3 Rp./dm^2, die Materialkosten für alle anderen Flächen (Seitenflächen und Deckfläche) betragen nur 1 Rp./dm^2

i) Wie muss man die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche und die Höhe des Quaders wählen, damit die gesamten Materialkosten minimal werden?

ii) Wie gross sind diese Kosten dann?

c) **Zahlenfolge** **4 P**

Die Folge $s_n = 3 \cdot \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ sei gegeben.

i) Berechnen Sie die ersten drei Folgenglieder. 1 P

ii) Handelt es sich bei der Folge um eine arithmetische oder um eine geometrische Folge? Untersuchen Sie beide Möglichkeiten. 2 P

iii) Konvergiert oder divergiert die Folge s_n für $n \rightarrow \infty$? Begründen Sie kurz. 1 P